目　录

第一章　予备知识

§1.1　集合

集合是可以互相区别的事物的汇集，也就是具有某种特定属性的事物的全体．构成一个集合的事物称为该集合的元素或元；用大写字母表示集合，用小写字母表示元素．

x是集合A的元素．我们说"x属于A"记为$x\in A$；x不是集合A的元素，说"x不属于A"，记为$x\notin A$．

不含任何元素的集合称为空集，记为ϕ．

如果集合A中的元素都是集合B的元素，则说集合B包含集合A，记作$B\supset A$；或说A含于B，记作$A\subset B$；也称A为B的子集．显然，每个集合均含于它自身之中，即对任何集合A都有$A\subset A$．集合A的任一异于A本身的非空子集合，称为A的真子集合．

我们规定空集是任何集合的子集合，即对任何集合A有$\phi\subset A$．

如果两个集合A、B有$A\subset B$，而且$B\subset A$，这时A、B由相同元素组成，是同一个集合，称A等于B，记作$A=B$．

一个集合X的一切子集合的集合，称为X的幂集合，或称为X的子集簇，记作PX．显然空集ϕ及X自身必为PX的元素，即$\phi\in PX$，$X\in PX$．

下面介绍集合的运算．用记号

$$A=\{x|\ x具有性质P\}$$

表示集合A是具有性质P的元素的全体．

集合$\{x|\ x\in A或x\in B\}$称为集合A与B的并，记为$A\cup B$．

集合$\{x|\ x\in A且x\notin B\}$称为集合A与B的差，记为$A\setminus B$．当$B\subset A$

时称差$A\setminus B$为B关于A的余集，记为C_AB。若在一个固定的集合A中讨论子集B时，也将B关于A的余集简称为B的余集，记作B^c或B'。

集合$\{x|\ x\in A$且$x\in B\}$称为集合A与B的交，记为$A\cap B$。

不难验证集合的并（加）和交（乘）的运算满足以下规律：

（1）$A\cup B=B\cup A$.（交换律）

（2）$A\cap B=B\cap A$.（交换律）

（3）$A\cup\phi=A$，$A\cup A=A$.

（4）$A\cap\phi=\phi$，$A\cap A=A$.

（5）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$.（结合律）

（6）$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$.（结合律）

（7）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.（分配律）

（8）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.（分配律）

（9）$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.（De Morgan 定律）

集合$\{x|\ x\in A$但$x\notin B$或$x\in B$但$x\notin A\}$称为集合A与B的对称差，记作$A\Delta B$。

由定义知$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，且$A\Delta B=B\Delta A$.以上指出对称差也是二集之并，但这两个集$A\setminus B$与$B\setminus A$互相排斥，与任意二集之并是不同的。

若将集合运算的并与交和代数运算的加法与乘法相对比，可以看出它们所遵循的规律有的相同，有的则不同。例如分配律（8）对代数运算是成立的，但（7）则不成立。

§1.2 群与环

定义1 如果在一个非空集合G上定义了一个乘法运算，记为$a\cdot b$（或定义一个加法运算，记为$a+b$），满足以下条件：

（1）$a\in G$，$b\in G$，则$a\cdot b\in G$ $(a+b\in G)$；

（2）对于G中任意元素a、b、c有

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad (a+(b+c)=(a+b)+c);$$

（3）在G中有一个元素e适合

$$e\cdot a=a\cdot e=a, \ \forall a\in G$$

（在G中有一元素0，适合

$$0+a=a+0=a, \ \forall a\in G);$$

（4）对于G中的每一个元素a，都有一个元素$a^{-1}\in G$，使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$$

（对于G中的每一个元素a，都有一个元素$-a\in G$，使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0);$$

则称G为一个群。元素e称为单位元素，a^{-1}称为a的逆元素（对于加法运算，0也称为零元素，$-a$也称为a的负元素）。

如果在群G中，对任意$a,b\in G$有$a\cdot b=b\cdot a(a+b=b+a)$，则称$G$为一交换群。

定义2 设在非空集合R上定义了加法运算和乘法运算，满足

（1）关于加法运算形成交换群，即

1） $(a+b)+c=a+(b+c)$，$\forall a,b,c\in R$；

2） $a+b=b+a$，$\forall a,b\in R$；

3） 在R中有零元素0，使得$0+a=a$，$\forall a\in R$；

4） 对R中任一元素a，在R中有一个元素b，使得$a+b=0$；

（2）关于乘法满足结合律

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c, \ \forall a,b,c\in R;$$

（3）关于加法和乘法满足分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a, \ \forall a,b,c\in R;$$

则称R为一个环。

例 PX关于代数运算对称差Δ及交$\cap$形成一个环。

解 只需用定义来验证。

（1）首先验证PX关于加法—对称差Δ形成交换群。

1) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C,\ \forall A,B,C\in PX$;

显然，因为等式两边都是由只属于集合A、B、C中某一个集合而不属于其它两个集合中任何一个集合的元素与同属于三个集合的公共元所组成的集合。

2) $A\Delta B=B\Delta A,\ \forall A,B\in PX$;

由对称差的定义，上式显然成立。

3) 空集合ϕ是零元素，$A\Delta\phi=\phi\Delta A=A,\ \forall A\in PX$;

4) A的逆元素即其自身$A\Delta A=\phi,\ \forall A\in PX$。

(2)结合律和分配律显然成立。

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

以上所给出的环具有以下两个特点：

(1)存在单位元素X。

因为 $X\cap A=A\cap X=A,\ \forall A\subset PX$;

(2)$A\cap A=A,\ \forall A\in PX$；此时称$PX$为幂等的。

具有单位元素且是幂等的环是我们今后要研究的主要对象。

§1.3 布尔代数(Boolean Algebra)

定义 3 设R是一个环，若R具有关于乘法的单位元e且是幂等的，即存在$e\in R$，对任意元素$x\in R$有$xe=ex=x$，而且$x^2=x$，则称R为一个布尔代数。

例 1 X的子集簇PX，以对称差Δ为加法，以交$\cap$为乘法；由上一节讨论知构成一个布尔代数，记作($PX,\Delta,\cap$)。

例 2 集合$A=\{0.1\}$，按以下方法定义加法和乘法

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

则$\{A,+,\times\}$为一个布尔代数.

例 3 已给集合$X(\neq\phi)$，研究集合$\{\phi,X\}$，以对称差为加法，以交集为乘法，则与例2完全相同，$\{X,\Delta,\cap\}$也是一个布尔代数。

布尔代数R具有以下重要性质：

(1)$x+x=0$，即$-x=x$；$\forall x\in R$。

(2)$xy=yx$；即环R是可交换的。

证明 任给$x,y\in R$，由于R是幂等的，有

$$x+y=(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x+xy+yx+y,$$

所以
$$xy+yx=0. \tag{1}$$

在(1)式中取$y=x$，得

$$x^2+x^2=x+x=0$$

性质(1)得证。

利用性质(1)有

$$xy+xy=0, \tag{2}$$

由(1)、(2)式，利用逆元素的唯一性得

$$xy=yx.$$

性质(2)得证。

§1.4 格

定义 4 集合X中的元素之间的一个关系$x\prec y$称为半序关系，如果满足

(1)对于X中的每个元素x有$x\prec x$；

(2)$x\prec y$，$y\prec x$蕴涵$x=y$；

(3)$x\prec y$且$y\prec z$蕴涵$x\prec z$。

此时也称集合X被关系"$\prec$"半序化.注意在以上定义中并不要求X中的每一对元素x、y都有$x\prec y$或$y\prec x$. 例如集合之间的包含关系是

一个半序关系.因为$A\subset A$对任何集合A总是成立的.$A\subset B$及$B\subset A$蕴涵$A=B$.若$A\subset B$,$B\subset C$则$A\subset C$.但对于任何两个集合，并非一定存在包含关系.

以上关系“$\prec$”也可读作“小于等于”，$a\prec b$读作a小于等于b（或a在b之前）.

半序集合X中的一个子集$\{a_\alpha\}$、称为一个链，如果对于该子集中的任意两个元素a_α，a_β都有$a_\alpha\prec a_\beta$或$a_\beta\prec a_\alpha$.

若H是半序集合X的一个子集，如果存在一个元素$u\in X$，使得对H中的每一个元素h有$h\prec u$，则称u为集合H的上界．自然要求u和H中的每一个元素是可比较的。同理，若存在$l\in X$，使得对于H中的每个元素h有$l\prec h$，则称l为h的下界．如果上界的集合中有一个最小元素，则称该元素为H的最小上界．记作$lubH$．同理，下界集合中的最大元素称为H的最大下界。记作$glbH$.

定义 5　如果一个半序集合中的每一对元素（x,y）都有一个最小上界和最大下界，则该半序集合称为一个格.

（x,y）的最小上界记作$x\vee y$，(x,y)的最大下界记作$x\wedge y$.

由以上定义知，所谓$z=x\vee y$（$z=x\wedge y$）是指z满足

（1）$x\prec z$，$y\prec z$（$z\prec x,z\prec y$）；

（2）若$x\prec u$，$y\prec u$则$z\prec u$（若$u\prec x$，$u\prec y$，则$u\prec z$）.

若在布尔代数R上，将“$x\prec y$”定义为$xy=x$，则R是半序的.因为容易验证“$\prec$”是一个半序关系.

（1°）　$x\cdot x=x^2=x$，所以$x\prec x$.

（2°）　$x\prec y\Rightarrow x\cdot y=x$,

　　　　$y\prec x\Rightarrow x\cdot y=y$,

所以　$x=y$.

（3°）　$x\prec y\Rightarrow xy=x$,

　　　　$y\prec z\Rightarrow yz=y$,

又　$xz=xyz=xy=x$，故　$x\prec z$.

命题　关于“$\prec$”布尔代数R是一个格.

证 只需证对任意二元素$x,y\in R$，都存在$x\vee y$、$x\wedge y$.

首先证明$x\wedge y=xy$. 只需用最大下界的定义来验证.

(1') $xy\cdot x=x\cdot xy=x^2y=xy$， 所以 $xy\prec x$.

$xy\cdot y=xy^2=xy$， 所以 $xy\prec y$.

(2') 若$u\prec x$，$u\prec y$. 则

$$uxy=ux\cdot y=uy=u，故 u\prec xy.$$

即xy为最大下界，$x\wedge y=xy$.

再证明 $x\vee y=x+y+xy$.

(1') $(x+y+xy)x=x^2+xy+xy=x$，

所以 $$x\prec x+y+xy;$$

同理，$(x+y+xy)y=xy+y^2+xy=y$，

所以 $$y\prec x+y+xy.$$

(2') 若 $x\prec u$，$y\prec u$ 则

$$u(x+y+xy)=ux+uy+uxy=x+y+xy,$$

所以 $$x+y+xy\prec u,$$

即 $x+y+xy$为最小上界，$x\vee y=x+y+xy$.

又由$x\in R$，$y\in R$ 知 $x+y\in R$，$xy\in R$，故 $x+y+xy\in R$，即 $x\wedge y\in R$，$x\vee y\in R$. 所以R是一个格.

例如，§1.3中例1指出($PX,\Delta,\cap$)为一个布尔代数. 又集合间的包含关系为一个半序关系，显然$A\subset B$，当且仅当$A\cap B=A$.

显然A,B的最小上界为$A\cup B$. 用Δ及$\cap$表示有

$$A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B).$$

又A,B的最大下界为$A\cap B$. 故($PX,\Delta,\cap$)为一个格.

在格R中再定义如下的运算：对于$x\in R$定义

$$x'=x+e,$$

其中e为R的单位元素.

由定义有

$$x+x'=x+x+e=e.$$

$$x\cdot x'=x(x+e)=x+x=0.$$

容易看出这种运算相当于PX中的余集运算．若$A\in PX$，显然$A\Delta A'=X$，$A\cap A'=\phi$．

可以证明：

$$(x\wedge y)'=x'\vee y'；$$
$$(x\vee y)'=x'\wedge y'．$$

也称为De Morgan定律．

§1.5 极大理想

以下用R表示一个布尔代数，且在其上半序关系“$x\prec y$”定义为$xy=x$，定义运算$x'=x+e$．由以上讨论知R为一个格且

$$x\wedge y=xy,\qquad x\vee y=x+y+xy.$$

定义 6 设$I\subset R$满足

(1°)若$x,y\in I$，则$x+y\in I$，即I对加法是封闭的；

(2°)若$x\in I$，$z\in R$，则$xz\in I$；

那末I就叫做一个理想．

注意，理想比子环要求要强，对于子环只要求当$x,z\in I$时，$xz\in I$，故理想必为子环．

定理 1 I是一个理想的充要条件为

(1) $x,y\in I$ 则 $x\vee y\in I$；

(2) $x\in I$，$z\prec x$， 则 $z\in I$．

证 必要性．即由定义 6 的(1°)，(2°)成立，证明定理中的(1)，(2)也成立．

设$x,y\in I$，由(1°)有$x+y\in I$，由(2°)有$xy\in I$，又$x\vee y=x+y+xy$，再利用(1°)得$x\vee y\in I$，即定理中(1)成立．

设$z\prec x$，故$zx=z$．又$x\in I$，$z\in R$，由(2)知$xz\in I$即$z\in I$，故定理中(2)成立．

充分性．由定理中(1)、(2)证定义 6 中(1°)，(2°)．

设$x,y\in I$，由(1)知$x\vee y\in I$，又

$$(x+y)(x\vee y)=(x+y)(x+y+xy)=(x+y)^2+(x+y)xy$$
$$=x+y+xy+xy=x+y;$$

即　$x+y\prec x\vee y$，由(2)知$x+y\in I$．即定义6中($1°$)得证．

若$x\in I$，$z\in R$，$xz\cdot x=x^2z=xz$，故$xz\prec x$．由(2)知$xz\in I$．即定义6中($2°$)得证．

定义7　设M是一个理想，如果$M\neq R$且若N是一个理想而且$N\supset M$，必有$N=R$或$N=M$；则称M为一个极大理想．

由定义可以看出不可能有一个极大理想包含单元e．因为若I为一个极大理想且$e\in I$，则由理想定义知，任取$x\in R$则$xe=x\in I$，于是$I=R$；与极大理想定义不符．

我们用$\mathscr{M}$表示R的所有极大理想的集合，自然需要证明$\mathscr{M}$是非空的．这可由以下定理得出．

定理2　对于任意的$x\in R$，若$x\neq e$则存在一个包含x的极大理想M；即存在$M\in\mathscr{M}$且$x\in M$．

证　分两步证之．

首先考虑所有包含x而不包含e的理想所构成的集合$\mathscr{X}$．$\mathscr{X}$是非空的．事实上，令

$$I_x=\{yx\mid y\in R\}$$

则$I_x\in\mathscr{X}$．因为当取$y=e$时$yx=ex=x\in I_x$即$x\in I_x$．又若$yx\in I_x$，$zx\in I_x$，则$yx+zx=(y+z)x\in I_x$．若$yx\in I_x$，$z\in R$，则$z(yx)=(zy)x\in I_x$．故I_x是包含x的理想．通常称I_x为包含x的主理想．

再证明$\mathscr{X}$有极大元素，即M存在．这里要用到Zorn引理．

Zorn引理　设$\mathscr{X}$是半序集合，$\mathscr{X}$非空．若在$\mathscr{X}$中任取一个链必具有上确界，则$\mathscr{X}$有极大元素．

$\mathscr{X}$按集合包含关系是半序的，在$\mathscr{X}$中任取一个链$\{I_a\}$．现证$\{I_a\}$有上界．作

$$I=\bigcup_a I_a$$

显然，对一切a有$I\supset I_a$．今证I也是理想．事实上，若$x\in I$，$y\in I$，

则必存在某个α和β使得$x\in I_\alpha$，$y\in I_\beta$. 由于$\{I_\alpha\}$是一个链，I_α，I_β必有包含关系，不妨设$I_\alpha\subset I_\beta$，则$x\in I_\beta$.$y\in I_\beta$，又I_β是理想，所以$x+y\in I_\beta$. 由此知$x+y\in I$.

又若$x\in I$，$z\in R$，则必存在某个γ使$x\in I_\gamma$. 所以$zx\in I_\gamma$. 即$zx\in I$.

由以上讨论知I为理想，又$x\in I_\alpha$故$x\in I$. 且$e\notin I_\alpha$，$\forall\alpha$，故$e\notin I$. 所以$I\in\mathscr{X}$. 即链$\{I_\alpha\}$有上界I.

由Zorn引理知$\mathscr{X}$必有极大元素M.

又若N为包含x的理想，$N\supset M$且$N\neq R$，则$N\in\mathscr{X}$，但M是极大元素，故$N=M$. 所以M是一个极大理想. 即$M\in\mathscr{M}$且$x\in M$. 定理得证.

定理 3 若$x,y\in R$，$x\neq y$，则必有极大理想M，使得$x\in M$而$y\notin M$；或者$x\notin M$而$y\in M$.

证 首先指出$x\vee y'$和$x'\vee y$中至少有一个不是e. 因为若$x\vee y'=e$且$x'\vee y=e$，则

$$y=ye=y(x\vee y')=y(x+y'+xy')=yx+yy'+yxy'=yx,$$

且 $$x=xe=x(x'\vee y)=x(x'+y+x'y)=xy=yx,$$

所以$x=y$，此与题设$x\neq y$矛盾.

故不妨设$x\vee y'\neq e$，由定理2知，必存在极大理想M，使$x\vee y'\in M$，但$x\prec x\vee y'$，所以$x\in M$. 同理有$y'\in M$.

但是若$y'\in M$则$y\notin M$，否则有$e=y\vee y'\in M$，于是$M=R$与M是极大理想矛盾. 定理得证.

定理 4 若M是极大理想，则对于一切$x\in R$，或者$x\in M$或者$x'\in M$.

证 任取$x\in R$，有四种可能情形：(1)$x\in M$，$x'\in M$；(2)$x\in M$，$x'\notin M$；(3)$x\notin M$，$x'\in M$；(4)$x\notin M$，$x'\notin M$.

显然情形(1)不能成立，因为若$x\in M$，$x'\in M$，则$e=x\vee x'\in M$. 与M是极大理想矛盾.

再证明情形(4)亦不能成立，若$x\notin M$，作集合

$$N=\{zx+m|\ z\in R,\ m\in M\},$$

则N是一个理想．因为若$z_1x+m_1\in N$，$z_2x+m_2\in N$；

则　$(z_1x+m_1)+(z_2x+m_2)=(z_1+z_2)x+(m_1+m_2)\in N$.

又任取　$zx+m\in N$　及　$y\in R$，则　$yz\in R$，$ym\in M$，故

$$y(zx+m)=(yz)x+ym\in N,$$

故N为理想．

又$x\in N$．因为取$z=e$，则$ex+0=x\in N$．而$x\notin M$所以$N\neq M$．因为$m\in M$且$m=0\cdot x+m\in N$，所以$M\subset N$．M是极大理想，故$N=R$．即e可以写成

$$e=z_0x+m_0,$$

其中$z_0\in R$，$m_0\in M$．由此得出

$$x'=x'e=x'(z_0x+m_0)=x'm_0\in M.$$

即由$x\notin M$推出$x'\in M$．可见(4)是不能成立的．故只有情形(2)或者情形(3)成立．定理得证．

§1.6　布尔代数的同构映射

定义 8　设S和$\widetilde{S}$是具有两个代数运算(加法和乘法)的系统，若有一个映射使S中每个元素a，都存在$\widetilde{S}$中的元素$\widetilde{a}$与之对应，且保持代数运算．即满足：

$$a\to\widetilde{a},\ b\to\widetilde{b}\Longrightarrow a+b\to\widetilde{a}+\widetilde{b},\ a\cdot b\to\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}.$$

则称此映射为同态映射．$\widetilde{S}$称为S的一个同态像．如果这个映射又是1-1的，则称此映射为同构映射．

本节将研究布尔代数R的表示法，给出R与其极大理想集合$\mathscr{M}$之间的关系．对于R中的每一个x，作$\mathscr{M}$的子集合

$$\mathscr{M}_x=\{M\in\mathscr{M}\ |x\notin M\}.$$

由定理2、3、4知，当$x\neq y$则$\mathscr{M}_x\neq\mathscr{M}_y$，且$\mathscr{M}_x$也可定义为

$$\mathscr{M}_x=\{M\in\mathscr{M}\ |x'\in M\}.$$

$\mathscr{M}_x$具有以下性质：

（1） $\mathscr{M}_{x\wedge y}=\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y$.

证 $M\in\mathscr{M}_{x\wedge y}\Longrightarrow x\wedge y\notin M\Longrightarrow x\notin M$ 且 $y\notin M$(因为 $x\wedge y\prec x$，$x\wedge y\prec y$)$\Longrightarrow M\in\mathscr{M}_x$且$M\in\mathscr{M}_y\Longrightarrow M\in\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y$.

所以 $\mathscr{M}_{x\wedge y}\subset\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y$.

反之. $M\in\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y\Longrightarrow x\notin M$且$y\notin M\Longrightarrow x'\in M$ 且 $y'\in M\Longrightarrow x'\vee y'\in M\Longrightarrow(x\wedge y)'\in M\Longrightarrow x\wedge y\notin M\Longrightarrow M\in\mathscr{M}_{x\wedge y}$.

即 $\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y\subset\mathscr{M}_{x\wedge y}$. 证毕.

（2） $\mathscr{M}_{x\vee y}=\mathscr{M}_x\cup\mathscr{M}_y$.

证 $M\in\mathscr{M}_{x\vee y}\Longleftrightarrow x\vee y\notin M\Longleftrightarrow x\notin M$或$y\notin M\Longleftrightarrow M\in\mathscr{M}_x$或$M\in\mathscr{M}_y\Longleftrightarrow M\in\mathscr{M}_x\cup\mathscr{M}_y$. 证毕.

（3） $(\mathscr{M}_x)'=\mathscr{M}_{x'}$.

证 $M\in\mathscr{M}_{x'}\Longleftrightarrow x'\notin M\Longleftrightarrow x\in M\Longleftrightarrow M\notin\mathscr{M}_x\Longleftrightarrow M\in(\mathscr{M}_x)'$.

（4） $\mathscr{M}_{x+y}=\mathscr{M}_x\triangle\mathscr{M}_y$.

证 由x'的定义知

$$xy'\vee x'y=xy'+x'y+xy'\cdot x'y=xy'+x'y=x(y+e)+\\+(x+e)y=xy+x+xy+y=x+y.$$

所以 $\mathscr{M}_{x+y}=\mathscr{M}_{xy'\vee x'y}=\mathscr{M}_{xy'}\cup\mathscr{M}_{x'y}=\mathscr{M}_{x\wedge y'}\cup\mathscr{M}_{x'\wedge y}$
$=(\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_{y'})\cup(\mathscr{M}_{x'}\cap\mathscr{M}_y)=(\mathscr{M}_x\cap(\mathscr{M}_y)')\cup((\mathscr{M}_x)'\cap\mathscr{M}_y)$
$=\mathscr{M}_x\triangle\mathscr{M}_y$. 证毕.

现在考虑布尔代数R及$\mathscr{M}$的子集簇$P\mathscr{M}$之间的映射：

$$x\Longleftrightarrow\mathscr{M}_x$$

则由定理3、4知，若$x\neq y$，则$\mathscr{M}_x\neq\mathscr{M}_y$，即映射是一一对应的。又由§1.3例1知（$P\mathscr{M},\triangle,\cap$）是一个布尔代数. 故由以上性质(1)、(4)即

$$\mathscr{M}_{xy}=\mathscr{M}_{x\wedge y}=\mathscr{M}_x\cap\mathscr{M}_y$$

$$\mathscr{M}_{x+y}=\mathscr{M}_x\triangle\mathscr{M}_y$$

知映射保持乘法与加法运算。所以$x\longleftrightarrow\mathscr{M}_x$为$R$和$P\mathscr{M}$之间的同构

映射．得以下定理．

定理 5　映射$x\longleftrightarrow\mathscr{M}_x$是将$R$映射为$P\mathscr{M}$的同构映射．

这个定理指出如何将布尔代数R嵌入极大理想集合$P\mathscr{M}$，使抽象的系统R得到具体的表示．

对于每一个$x\in R$，还可以考虑将极大理想集合$\mathscr{M}$映到§1.3例2所给的最小的布尔代数$\{0.1\}$的映射$\hat{x}$：

$$\hat{x}(M)=\begin{cases}0, & x\in M;\\ 1, & x\notin M.\end{cases}$$

则$\hat{x}$具有以下性质：

（1）　$x\neq y$　则　$\hat{x}\neq\hat{y}$．　**显然．**

（2）　$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}$．

证　$$(x+y)^{\wedge}(M)=\begin{cases}0, & x+y\in M;\\ 1, & x+y\notin M.\end{cases}$$

若$x+y\in M$，则 $M\notin\mathscr{M}_{x+y}=\mathscr{M}_x\triangle\mathscr{M}_y$．故或者 $M\notin\mathscr{M}_x$同时$M\notin\mathscr{M}_y$；或者 $M\in\mathscr{M}_x$ 同时 $M\in\mathscr{M}_y$．由此知

$x+y\in M\Longrightarrow x\in M$同时$y\in M$，或者$x\notin M$同时$y\notin M$．

当　$x\in M$　则　$\hat{x}(M)=0$，$y\in M$　则　$\hat{y}(M)=0$，

所以　$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}=0$．

当　$x\notin M$　则　$\hat{x}(M)=1$，$y\notin M$　则　$\hat{y}(M)=1$，

所以　$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}=0$．

若　$x+y\notin M\Longrightarrow x\in M$，$y\notin M$；或　$x\notin M$，$y\in M$．

$x\in M$，$\hat{x}(M)=0$，$y\notin M$，$\hat{y}(M)=1$．所以

$$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}=1.$$

$x\notin M$，$\hat{x}(M)=1$，$y\in M$，$\hat{y}(M)=0$．所以

$$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}=1.$$

（3）　$(xy)^{\wedge}=\hat{x}\,\hat{y}$．证明与（2）同．

以上性质说明映射$\{\widehat{x}(M)\}$所构成的集合保持加法与乘法运算。

(4)映射$\widehat{x}(M)$的核记作$K_{\hat{x}}=\{M|\widehat{x}(M)=0\}$，则由$\mathscr{M}_x$的定义知

$$K_{\hat{x}}=(\mathscr{M}_x)'=\mathscr{M}_x'.$$

同理映射$\widehat{x'}(M)$的核为$K_{\hat{x}'}=(\mathscr{M}_{x'})'=\mathscr{M}_x$。

§1.7 拓扑空间与可测空间

定义9 集合X的子集簇$\tau\subset PX$称为X上的一个拓扑，若τ具有如下三个性质：

(1)$\phi\in\tau$, $X\in\tau$;

(2)$U,V\in\tau$则$U\cap V\in\tau$;

(3)若$\{V_\alpha\}(\alpha\in A)$是$\tau$的元素的任何集簇，则$\bigcup\limits_{\alpha\in A}V_\alpha\in\tau$。

若τ是X上的拓扑，则X称为拓扑空间，且τ的元素称为X的开集。

若X和Y为拓扑空间，f是X到Y内的映射，若对Y的每一个开集V，$f^{-1}(V)$是X的开集，则称f为连续的。

定义10. 设X是拓扑空间，集$K\subset X$，如果K的每个开覆盖包含有限子覆盖，即若存在开集簇$\{U_\alpha\}$，$\alpha\in A$，使得$\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha\supset K$，必存在$A$的有限子集$F$，使$\bigcup\limits_{\alpha\in F}U_\alpha\supset K$，则称$K$为紧集合。

如果X本身是紧的，则称X为紧空间。如果X的每一点有一个邻域，且该邻域的闭包是紧的，则称X为局部紧空间。

定义11 若X是一个拓扑空间，如果对于任意$p\in X$，$q\in X$，$p\neq q$。可以找到开集$U_p\in X$，$U_q\in X$，使得$p\in U_p$，$q\in U_q$且$U_p\cap U_q=\phi$，则称X为Hausdorff空间。

欧氏空间R^n的紧子集就是有界闭集，R^n是局部紧的Hausdorff空间，而且每个度量空间也是Hausdorff空间。

定义12 集合X的子集簇$\mathscr{P}\subset PX$称为X的一个σ—代数，若$\mathscr{P}$

具有如下性质：

(1) $X\in\mathscr{F}$；

(2)若$A\in\mathscr{F}$，则$A^c\in\mathscr{F}$，其中$A^c=X\setminus A$；

(3)若$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1.2,\cdots$则$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

若$\mathscr{F}$是X的σ—代数，则称X为可测空间，$\mathscr{F}$的元素称为X的可测集.为更明确起见，通常用$(X,\mathscr{F})$记可测空间.

若X是可测空间，Y是拓扑空间，f是X到Y的映射，若对每一个开集$V\in Y$，$f^{-1}(V)$是X的可测集，则称f为可测的.

定理6. 若$\mathscr{A}$是X的任意子集族，则在X内存在一个最小的σ—代数$\mathscr{F}^*$，使得$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}^*$.

证：令$\mathscr{M}$是X内所有包含$\mathscr{A}$的σ—代数$\mathscr{F}$的集合.

$$\mathscr{M}=\{\mathscr{F}\mid\mathscr{F}\text{是}X\text{的}\sigma\text{-代数，且}\mathscr{F}\supset\mathscr{A}\}.$$

因为PX是X的一个σ—代数且$\mathscr{A}\subset PX$，所以$\mathscr{M}$是非空的，设$\mathscr{F}^*$为所有$\mathscr{F}\in\mathscr{M}$的交：

$$\mathscr{F}^*=\bigcap_{\mathscr{F}\in\mathscr{M}}\mathscr{F}.$$

则$\mathscr{F}^*$含于每一个包含$\mathscr{A}$的σ-代数中．下面证明$\mathscr{F}^*$是σ-代数.

(1) $X\in\mathscr{F}^*$．显然，因为$X\in\mathscr{F}$，$\forall\mathscr{F}\in\mathscr{M}$.

(2)若$A\in\mathscr{F}^*$，则$A\in\mathscr{F}$，$\forall\mathscr{F}\in\mathscr{M}$．由于$\mathscr{F}$是$\sigma$-代数，故$A^c\in\mathscr{F}$，$\forall\mathscr{F}\in\mathscr{M}$．所以$A^c\in\mathscr{F}^*$.

(3)若$A_n\in\mathscr{F}^*$，$n=1,2\cdots$，则$A_n\in\mathscr{F}$，$\forall\mathscr{F}\in\mathscr{M}$，$n=1,2,\cdots$，故$\bigcup A_n\in\mathscr{F}$，$\forall\mathscr{F}\in\mathscr{M}$，所以$\bigcup A_n\in\mathscr{F}^*$.

这就证明了$\mathscr{F}^*$是包含$\mathscr{A}$的最小的σ-代数，也称$\mathscr{F}^*$为由$\mathscr{A}$生成的σ-代数.

定义13. 设X是拓扑空间，在X内存在一个最小的σ-代数$\mathscr{B}$，使得X内的每一个开集都属于$\mathscr{B}$（定理6）．称$\mathscr{B}$内的元素为X的Borel集.

由以上定义知，X中的闭集是Borel集，因为闭集是开集的余集；且闭集的一切可数并及开集的一切可数交都是Borel集，闭集的可数并称为F_σ集，开集的可数交称为G_δ集。

因为$\mathscr{B}$是σ-代数，可以将X看成一个可测空间，即$(X, \mathscr{B})$；此时$\mathscr{B}$集起着可测集的作用。若Y是任意拓扑空间，f：X→Y是X的连续映射，由定义，对Y的每一个开集V，$f^{-1}(V)\in\mathscr{B}$，即X的每个连续映射是Borel可测的。

定义14. 设$\mathscr{F}$是X上的一个σ-代数，若对于每一个$A\in\mathscr{F}$，有一个实数$\mu(A)$与之对应，$0\leqslant\mu(A)\leqslant+\infty$，且满足以下条件：

（1）$\mu(\phi)=0$，

（2）对于任何$\{A_n\}\in\mathscr{F}$，当$m\neq n$，$A_m\cap A_n=\phi$，有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \qquad \text{（可数可加性）},$$

则称μ为$\mathscr{F}$上的一个正测度，简称测度。

一个可测空间（X，$\mathscr{F}$）具有定义在$\mathscr{F}$上的正测度μ。记作（X，$\mathscr{F}$，μ），称为一个测度空间。

定理7. 设μ为σ-代数$\mathscr{F}$上的正测度，则

（1）若A_1，…，A_n均为$\mathscr{F}$的两两不相交的元素，

则 $$\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n).$$

（2） 如果$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且$A\subset B$，则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。

（3） 若$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\in\mathscr{F}$且

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$$

则当$n\to\infty$时$\mu(A_n)\to\mu(A)$。

（4） 若 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\in\mathscr{F}$，且

$$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$$

$\mu(A_1)$为有限数，则当$n\to\infty$时$\mu(A_n)\to\mu(A)$。

证 （1） 在定义14的条件（2）中，取$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$即得之。

（2） $B=A\cup(B\setminus A)$，且$A\cap(B\setminus A)=\phi$，则由（1）得$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)\geqslant\mu(A)$。

（3） 令$B_1=A_1$，$B_n=A_n\setminus A_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，则$B_n\in\mathscr{F}$，且当$i\neq j$时$B_i\cap B_j=\phi$．$A_n=B_1\cup\cdots\cup B_n$，$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$。由（1）知，$\mu(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)$，又由测度定义知$\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$，由无穷级数和的定义得（3）。

（4） 令 $C_n=A_1\setminus A_n$，则 $C_1\subset C_2\subset C_3\subset\cdots$，

$$\mu(C_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n).$$

又$A_1\setminus A=\bigcup C_n$，于是由（3）得

$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1\setminus A)=\lim_{n\to\infty}\mu(C_n)=\mu(A_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

即得（4）。

定义15．设$f(x)$是定义在可测空间X上的实函数，若对于任何有限实数a，集合$\{x\in X\,|f(x)>a\}$是可测集，则称$f(x)$为可测函数。在可测空间X上，值域仅由$(0,\infty)$内有限个点组成的函数s，称为简单函数。

若简单函数s的值是$a_1,a_2,\cdots,a_n$，且令$A_i=\{x\,|s(x)=a_i\}$，则显然

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}.$$

其中χ_{A_i}是A_i的特征函数．即

$$\chi_{A_i}=\begin{cases}1, & 当x\in A_i,\\ 0, & 当x\notin A_i.\end{cases}$$

定义16．若$\mathscr{F}$是集X上的σ-代数，μ为$\mathscr{F}$上的正测度，s是X

上的可测简单函数

$$s=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}.$$

如果$E\in\mathscr{F}$，定义积分

$$\int_E s\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i\cap E).$$

若f：$X\to[0,\infty)$为可测函数，$E\in\mathscr{F}$，则f在E上关于测度μ的Lebesgue积分定义为

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\sup\int_E s\mathrm{d}\mu.$$

其中上确界取遍所有使得$0\leqslant s\leqslant f$的简单可测函数s.

由以上定义显然有以下命题，其中出现的函数和集都假定是可测的.

（1）若$0\leqslant f\leqslant g$，则$\int_E f\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E g\mathrm{d}\mu$，

（2）如果$A\subset B$，$f\geqslant 0$，则$\int_A f\mathrm{d}\mu\leqslant\int_B f\mathrm{d}\mu$，

（3）若$f\geqslant 0$，c为常数，$0\leqslant c\leqslant\infty$，则

$$\int_E cf\mathrm{d}\mu=c\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

（4）若$f\geqslant 0$，则$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu$.

另外，若$f(x)=0$，$\forall x\in E$,即使$\mu(E)=\infty$,我们约定$\int_E f\mathrm{d}\mu=0$；同样，若$\mu(E)=0$，且$f(x)=\infty$，$\forall x\in E$也有$\int_E f\mathrm{d}\mu=0$.

下面给出几个重要的定理.

定理 8（Lebesgue单调收敛定理）．设$\{f_n\}$：$X\to[0,\infty]$是一个X上的可测函数序列，且满足

（1）$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\infty$，$\forall x\in X$，

（2）当$n\to\infty$时，$f_n(x)\to f(x)$，$\forall x\in X$；

则f是可测的，且当$n\to\infty$时

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu。$$

定理 9（Fatou引理）．如果f_n: $X\to[0,\ \infty]$是可测的，$n=1,\ 2,\ \cdots$；则

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

定理10．若f：$X\to[0,\ \infty]$是可测的，且

$$\varphi(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu \qquad (E\in\mathscr{F})$$

则φ是$\mathscr{F}$上的一个测度，且

$$\int_X g\mathrm{d}\varphi=\int_X gf\mathrm{d}\mu。$$

对值域在$[0,\infty]$内X上的任一可测函数g成立。

还可以在测度空间（X，$\mathscr{F}$，μ）上考虑复函数的积分。若$f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$，其中u和v是X上的可测函数，也就是$f(x)$：$X\to\boldsymbol{C}$（复数域）是X上的复可测函数，定义L^1（X，μ）：

$$L^1(X,\mu)=\{f：X\to\boldsymbol{C}\text{可测}|\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu<\infty\}.$$

$L^1(X,\ \mu)$中的元素称为Lebesgue可积函数．

若$f\in L^1(X,\ \mu)$，$f=u+\mathrm{i}v$，对每一个可测集E定义

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E u^+\mathrm{d}\mu-\int_E u^-\mathrm{d}\mu+\mathrm{i}\int_E v^+\mathrm{d}\mu-\mathrm{i}\int_E v^-\mathrm{d}\mu.$$

其中$u^+=\max(u,\ 0)$，$u^-=\max(-u,\ 0)$即u的正部和负部，v^+，v^-分别为v的正部和负部．

定理11．若$f\in L^1(X,\ \mu)$，则

$$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

定理12（Lebesgue控制收敛定理）．若$\{f_n\}$是X上的复可测函数序列，满足

（1） $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$， $\forall x\in X$；

（2）存在一个函数$g\in L^1(X,\ \mu)$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant g(x). \qquad \forall x\in X,\ n=1,\ 2,\ \cdots;$$

则$f\in L^1(X,\ \mu)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\mathrm{d}\mu=0,$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu$。

§1.8 Borel测度

定义17. 集合X叫作数域K上的一个线性空间，如果下列条件成立：

（1）X是一个可交换的加法群；

（2）对于每一个$x\in X$及每个$\alpha\in K$，总有X中的一个元素与之对应，记作αx，即定义了数量乘法，满足

$$1\cdot x=x;$$

对任何α，$\beta\in K$，x，$y\in X$，有

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,$$
$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)。$$

若K为复数域$\boldsymbol{C}$，则称X为复线性空间或复向量空间．若K为实数域$\boldsymbol{R}$，则称X为实线性空间。

线性空间X到复数域$\boldsymbol{C}$（这是最简单的向量空间）的映射Λ，若满足

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y,\ \forall x,\ y\in X,\ \alpha,\ \beta\in K,$$

称Λ为一个线性泛函．线性泛函就是X上满足以上所示的条件的一个复函数。

例如$L^1(X, \mu)$是一个线性空间，而映射

$$f \longrightarrow \int_X f d\mu$$

是$L^1(X, \mu)$上的一个线性泛函．

定义18. 设f是拓扑空间X上的复函数，集合$\{x|f(x)\neq 0\}$的闭包，叫做f的支集．记作Supp$f$；即

$$\text{Supp} f = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}。$$

在X上具有紧支集的连续复函数的总体记为$C_c(x)$。容易验证$C_c(x)$是一个线性空间。

定理13. （Riesz表示定理）设X是局部紧的Hausdorff空间，Λ是$C_c(X)$上的正线性泛函，则在X上存在一个包含X的一切Borel集的σ-代数$\mathscr{F}$，并存在$\mathscr{F}$上的唯一正测度μ，使得

（1）对每个$f \in C_c(x)$，$\Lambda f = \int_X f d\mu$.

（2）对每个紧集$K \subset X$，$\mu(K) < \infty$，

（3）对每个$E \in \mathscr{F}$，$\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V，V\text{是开集}\}$。

（4）对每个开集E和每个$E \in \mathscr{F}$且$\mu(E) < \infty$，有

$\mu(E) = \sup\{\mu(K)，K \subset E，K\text{是紧集}\}$。

（5）若$E \in \mathscr{F}$，$A \subset E$，且$\mu(E) = 0$，则$A \in \mathscr{F}$.

定义19. 定义在局部紧Hausdorff空间X的全体Borel集所成的σ-代数上的测度μ称为X上的Borel测度．若Borel集$E \subset X$且$\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V，V\text{为开集}\}$，则称$E$为外正则的，若$E \subset X$，$\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subset E, K\text{为紧集}\}$，则称$E$为内正则的．如果$X$内的每个Borel集同时是外正则和内正则的，则称Borel测度μ为正则的．

定义20. 若拓扑空间的一个集E满足

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k，E_k\text{为紧集}，k = 1, 2, \cdots,$$

则称E为σ–紧的．若测度空间的集E满足

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\ \mu(E_k)<\infty,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

则称E具有σ–有限测度．

定理14（Lusin定理）．设X是局部紧的Hausdorff空间，μ是X上的正则Borel测度，f是X上的复可测函数，$\mu(A)<\infty$，如果$x\notin A$，$f(x)=0$．任给$\varepsilon>0$，则存在一个$g\in C_c(X)$，使得

$$\mu(\{x\mid f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon,$$

并且总可以使

$$\sup_{x\in X}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

§1.9 L^p空间

定义21．X是一个具有正测度μ的测度空间．f：$X\to \boldsymbol{C}$是X上的可测函数．对于$1\leqslant P<\infty$，满足条件

$$\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu<\infty$$

的可测函数$f(x)$的全体，记为$L^p(X,\ \mu)$或简记作$L^p(\mu)$．即

$$L^p(X,\ \mu)=\{f:X\to\boldsymbol{C}\mid f\text{可测且}\int_X|f(x)|^p\mathrm{d}\mu<\infty\}.$$

又定义

$$\|f\|_p=\{\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\}^{1/p}$$

称$\|f\|_p$为f的L^p–范数．

若L^p中两个元素$f(x)$和$g(x)$在X上几乎处处相等，则$\|f-g\|_p=0$．记$f\sim g$当且仅当$\|f-g\|_p=0$，显然这是$L^p(X,\ \mu)$内的一个等价关系．通过这个等价关系，将$L^p(X,\ \mu)$分成各个等价类，每一类都由一切与给定的一个函数等价的函数所组成．

对于$P=\infty$，定义

$$\|f\|_\infty=\inf\{\alpha\,|\mu(\{x\in X\,|\,|f(x)|>\alpha\})=0\}$$

为$f(x)$的本性最大范数. 若$\{\alpha\,|\mu(\{x\in X\,|f(x)|>a\})=0\}$为空集，则命$\|f\|_\infty=\infty$.

定义$L^\infty(X,\mu)$为:

$$L^\infty(X,\mu)=\{f:\ X\to \boldsymbol{C}\,|f\text{可测，且}\|f\|_\infty<\infty\}.$$

下面讨论$L^p(X,\mu)$, $1\leqslant P\leqslant\infty$的性质，先给出两个重要的不等式.

定理15. 设$1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，即$p$和$q$是共轭指数. X是一个具有测度μ的测度空间，f和g都是$X\to[0,\infty]$的可测函数，则有

(1) $\int_X fg\mathrm{d}\mu\leqslant\{\int_X f^p\mathrm{d}\mu\}^{1/p}\{\int_X g^q\mathrm{d}\mu\}^{1/q}$.

称之为Hölder不等式. 当$p=q=2$时也称为Schwarz不等式.

(2) $\{\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu\}^{1/p}\leqslant\{\int_X f^p\mathrm{d}\mu\}^{1/p}+\{\int_X g^p\mathrm{d}\mu\}^{1/p}$.

称之为Minkowski不等式.

证(1)若不等式右端中的任一个因子为∞，则不等式显然成立. 若右端有一个因子为零，例如$\int_X f^p\mathrm{d}\mu=0$则$f=0\,a.e.$因此$fg=0\ a.e$, 所以不等式成立. 因此只需考虑$0<\int_X f^p\mathrm{d}\mu<\infty$, $0<\int_X g^q\mathrm{d}\mu<\infty$的情形.

令 $F=\dfrac{f}{\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}}$, $G=\dfrac{g}{\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}}$,

则 $\int_X F^p\mathrm{d}\mu=1$, $\int_X G^q\mathrm{d}\mu=1$. 只需证 $\int_X F\cdot G\mathrm{d}\mu\leqslant 1$.

设$x\in X$使得$0<F(x)<\infty$, $0<G(x)<\infty$, 则存在实数a和b使得$F(x)=\mathrm{e}^{a/p}$, $G(x)=\mathrm{e}^{b/q}$. 又$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由指数函数的凸性，有

$$\mathrm{e}^{a/p+b/q}\leqslant\frac{e^a}{p}+\frac{e^b}{q},$$

即 $$F(x)\cdot G(x)\leqslant\frac{F(x)^p}{p}+\frac{G(x)^q}{q},\quad \forall x\in X.$$

积分得

$$\int_X F(x)G(x)\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

将F、G的表示式代入，即得所证.

（2）记 $(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$,
利用Hölder不等式，得

$$\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\int_X g^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X(f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

又$(p-1)q=p$，上式给出

$$\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}\left[\left(\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left(\int_X g^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right].\qquad(3)$$

当 $\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu=0$ 或 $\int_X f^p\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_X g^p\mathrm{d}\mu$中有一个为∞，则Minkowski 不等式自然成立。因此只需考虑$\int_X(f+g)^p\mathrm{d}\mu\neq0$ 且 $\int_X f^p\mathrm{d}\mu$。及 $\int_X g^p\mathrm{d}\mu$为有限的情形。由函数t^p的凸性知

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p\leqslant\frac{1}{2}(f^p+g^p),$$

故此时$\int(f+g)^p\mathrm{d}\mu$为有限的．这样用（3）式右端第一个因式除

(3)式两端，并注意 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，即得所证。

定理16. 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$L^p(X,\mu)$是一个线性空间，且

(1) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$，$f, g\in L^p(X,\mu)$，

(2) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\ \|f\|_p$，　　$f\in L^p(X,\mu)$，α—复数。

证 当 $1<p<\infty$，由Minkowski不等式得

$$\left(\int_X|f+g|^p d\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_X(|f|+|g|)^p d\mu\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$+\left(\int_X|g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

即得(1)式．当 $p=1$ 或 $p=\infty$，由 $|f+g|\leqslant|f|+|g|$，(1)式显然成立．由此知当 $f\in L^p(X,\mu)$，$g\in L^p(X,\mu)$，则 $f+g\in L^p(X,\mu)$.

(2)显然成立，即$f\in L^p(X,\mu)$，则$\alpha f\in L^p(X,\mu)$。
由此得知$L^p(X,\mu)$为一个线性空间。

若f，g，$h\in L^p(X,\mu)$，由以上定理得

$$\|f-h\|_p\leqslant\|f-g\|_p+\|g-h\|_p。$$

这个不等式表明，若以$\|f-g\|_p$定义f，g之间的距离$d(f,g)$，则可将$L^p(X,\mu)$看成一个度量空间．此时$L^p(X,\mu)$不是以函数为元素的空间，而是一个以函数的等价类为元素的空间、事实上$L^p(X,\mu)$是一个完备的度量空间。

定理17 对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$，和每一个正测度$\mu$，$L^p(X,\mu)$是一个完备的度量空间。

证 首先假定 $1\leqslant p<\infty$，设$\{f_n\}$是$L^p(X,\mu)$内的一个Cauchy序列，即对每一个$\varepsilon>0$，都存在整数$N>0$，当$n>N$、$m>N$时有$\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon$．只需证明$\{f_n\}$必在$L^p(X,\mu)$中收敛，即存在$f\in L^p(X,\mu)$，使$\|f_n-f\|_p\to0$.

因为$\{f_n\}$是Cauchy列，则存在一个子序列$\{f_{n_i}\}$，使得

$$\| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \| < \frac{1}{2^i}, \qquad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

定义

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

则$g_k \in L^p(X, \mu)$，且由Minkowski不等式知

$$\| g_k \|_p \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} < 1.$$

再由Fafou引理，得出$\| g \|_p < 1$．特别地，几乎处处有$g(x) < \infty$。所以级数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) \qquad (4)$$

对几乎所有的$x \in X$是绝对收敛的。定义

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \cdots, & x\text{为(4)式的收敛点}, \\ 0, & x\text{使(4)式发散}. \end{cases}$$

显然

$$\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) = f(x). \qquad a.e.$$

下面再证明f是$\{f_n\}$的L^p—极限。即$\| f_n - f \|_p \to 0$，且$f \in L^p(X, \mu)$．

因为 $|g_m(x) - g_k(x)| = |f_{n_m} - f_{n_{m-1}}| + \cdots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geqslant |f_{n_m} - f_{n_k}|$，

令$m \to \infty$ 则得

$$|f - f_{n_k}| \leqslant |g(x) - g_k(x)|,$$

又$g_k(x)$是单调增加的，所以

$$|f - f_{n_k}| \leqslant 2g(x)。$$

而 $g(x) \in L^p(X, \mu)$，且 $\lim_{k \to \infty} |f - f_{n_k}|^p = 0$ （几乎处处），

由Lebesgue控制收敛定理有

$$\| f-f_{n_k} \|_p \to 0,$$

所以 $f-f_{n_k}\in L^p$. 又 $f_{n_k}\in L^p$, 故 $f(x)\in L^p$.

再回到原序列$\{f_n\}$。由于$\{f_n\}$是Cauchy列，任取$\varepsilon>0$，存在$N>0$。当n, $m>N$有$\| f_m-f_n \|_p<\varepsilon$. 于是由Fatou引理，对每一个$m>N$有

$$\int_X |f-f_m|^p d\mu \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_{n_i}-f_m|^p d\mu < \varepsilon^p,$$

即当$m\to\infty$时有$\| f-f_m \|_p \to 0$. 即$L^p(X, \mu)$当$1\leqslant p<\infty$是完备的.

再考虑$p=\infty$的情形. 设$\{f_n\}$是L^∞内的Cauchy列。记

$$A_k=\{x\in X|\ |f_k(x)|>\| f_k \|_\infty\} \quad k=1, 2, \cdots,$$

$$B_{m,n}=\{x\in X|\ |f_n(x)-f_m(x)|>\| f_n-f_m \|_\infty\}, \quad m,n=1,2,\cdots$$

则集合A_k, $B_{m,n}$的测度为零。令E为所有A_k, $B_{m,n}$的并集。即

$$E=\left(\bigcup_k A_k\right)\bigcup\left(\bigcup_{m,n} B_{m,n}\right),$$

则$\mu(E)=0$, 并且在E^c上$\{f_n\}$一致收敛于有界函数f. 若在E上定义$f(x)=0$，则$f\in L^\infty(X, \mu)$，且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)。 \quad a.e.$$

同时

$$\| f-f_n \|_\infty \to 0,$$

故$L^\infty(X, \mu)$是完备的.

由以上证明过程看出，下面的结论是成立的.

定理18. 若$\{f_n\}$是$L^p(X, \mu)$内的Cauchy序列($1\leqslant p\leqslant\infty$)，$f$是$\{f_n\}$的$L^p$—极限，则$\{f_n\}$存在一个子序列，它几乎处处收敛于$f(x)$.

下面给出$L^p(X, \mu)$空间的性质. 若$f: X\to[0, \infty]$是可测函数，对于$n=1, 2, \cdots$及$1\leqslant i\leqslant n2^n$，定义

$$E_{n,i}=f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n},\ \frac{i}{2^n}\right]\right) \quad 及 \quad F_n=f^{-1}([n,\infty])。$$

令
$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}+n\chi_{F_n} \tag{5}$$

容易看出，s_n为简单可测函数且满足

$$0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant f,$$

且
$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x),\qquad \forall x\in X。$$

事实上，若x使得$f(x)<\infty$，则当n足够大时，$s_n\geqslant f(x)-2^{-n}$，若x使得$f(x)=\infty$，则$s_n(x)=n$。故$n\to\infty$时$s_n(x)\to f(x)$。这就是说X上的可测函数$f(x)$可以用X上的简单可测函数s_n来逼近。

定理19. 设S是X上的满足如下条件的复可测简单函数s构成的函数类：

$$\mu(\{x:s(x)\neq 0\})<\infty.$$

若$1\leqslant p<\infty$，则S在$L^p(X,\mu)$内是稠密的。

证 首先$S\subset L^p(X,\mu)$是显然的。若$f\in L^p(X,\mu)$，$f\geqslant 0$，令s_n为（5）式所给的序列。由于$0\leqslant s_n\leqslant f$，有$s_n\in L^p(X,\mu)$。因此$s_n\in S$。又

$$|f-s_n|^p\leqslant f^p$$

由控制收敛定理知，当$n\to\infty$时$\|f-s_n\|_p\to 0$。即f属于S的L^p-闭包。对于一般复可测函数同样得证。

定理20. 设X是一个局部紧的Hausdorff空间，μ是X的σ-代数$\mathscr{F}$上的正则Borel测度，则对$1\leqslant p<\infty$，$C_c(x)$在$L^p(X,\mu)$内稠密。

证 如定理19.作简单函数的集合S.由Lusin定理知，若$s\in S$，任给$\varepsilon>0$，存在一个函数$g\in C_c(x)$，使得除去一个测度小于ε的集外$g(x)=s(x)$，并且$\|g\|\leqslant\|s\|_\infty$。因此，

$$\|g-s\|_p\leqslant 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$$

又S在$L^p(X,\ \mu)$内稠密，故$C_c(x)$在$L^p(X,\ \mu)$中稠密.

定理20说明，若$1\leqslant p\leqslant\infty$，$L^p(X,\ \mu)$是赋予$C_c(x)$以$L^p$—距离所得的度量空间的完备化.

第二章　Banach空间

本章介绍Banach空间的几个重要定理，并通过它们的具体应用导出分析方面的一些重要结论。首先给出赋范线性空间上的Hahn-Banach定理，利用它导出Poisson积分公式；再借助于完备性概念，通过完备度量空间的Baire定理，给出Banach空间的两个重要定理：Banach-Steinhaus定理及开映射定理，并通过Banach-Steinhaus定理导出有关三角级数的一些结论。

§2.1　Banach空间

定义1　一个复向量空间X称为赋范线性空间，如果对于每一个$x\in X$，对应一个实数$\|x\|$称为x的范数，满足

（1）$\|x\|\geqslant 0$，且$\|x\|=0$当且仅当$x=0$；

（2）$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$\forall x,\ y\in X$、

（3）$\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|$，$\forall x\in X$，$\alpha\in \boldsymbol{C}$。

利用范数可以定义X中两个元素$x.y$的距离：$d(x.y)=\|x-y\|$，这表明每个赋范线性空间都可以看成一个度量空间。

若一个赋范线性空间在其范数所定义的度量下是完备的，则称该空间为Banach空间。

例1　若X是一个拓扑空间（例如X是实数域或复数域），考虑定义在X上的所有有界连续函数$C(X)$，则$C(X)$是一个线性空间，有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall f,g\in C(X),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),\ \forall f\in C(X),\ \alpha\in K$$

现定义范数，记作$\|f\|_\infty$：

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|,\ x\in X\}.$$

容易验证$\|f\|_\infty$满足范数的三个条件，若$\{f_n\}$为Cauchy列，则按所定义的范数，f_n收敛于f为一致收敛，故$f(x)$仍为连续函数，所以$C(X)$是完备的．这表明$C(X)$对于这样的范数是一个Banach空间。

例 2 实数域$\boldsymbol{R}$上的可测函数f，满足条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^p\mathrm{d}x<\infty(1\leqslant p<+\infty)$，构成线性空间$L^p(\boldsymbol{R})$；若引入范数

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

则由第一章知$L^p(\boldsymbol{R})$是一个Banach空间。

定义 2 设$g(x)$是赋范线性空间X上的线性泛函（简记作$g(x)$：$X\to\boldsymbol{C}$），定义g的范数为

$$\|g\|=\sup\left\{\frac{|g(x)|}{\|x\|},\ x\neq 0,\ x\in X\right\},$$

若$\|g\|<\infty$，则称g为有界线性泛函。

容易证明

$$\begin{aligned}\|g\|&=\sup\{|g(x)|,\ \|x\|=1\}\\&=\sup\{|g(x)|,\ \|x\|\leqslant 1\}\\&=\inf\{c\,|,\ |g(x)|\leqslant c\|x\|\}.\end{aligned}$$

由以上定义显然有$|g(x)|\leqslant\|g\|\,\|x\|$，由此容易得到以下结论。

定理 1 若$g(x)$：$X\to\boldsymbol{C}$为一线性泛函，则上面三个条件中的每一个蕴涵着另外两个：

（1）g是有界的；

（2）g是连续的；

（3）g在X的某个点上是连续的。

证 由于$|g(x_1-x_2)|\leqslant\|g\|\,\|x_1-x_2\|$，即$|g(x_1)-g(x_2)|$

$\leqslant \|g\| \|x_1-x_2\|$，显然(1)蕴涵着(2)，(2)蕴涵着(3)是自然的. 由(3)，若g在$x_0\in X$点连续，则对每个$\varepsilon>0$，可以找到$\delta>0$，当$\|x-x_0\|<\delta$，则$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$，换言之，$\|x\|<\delta$蕴涵着

$$|g(x)|=|g(x_0+x)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

因而$\|g\|\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$即(3)蕴涵着(2). 证毕.

若X，Y为两个赋范线性空间，A是X到Y的线性变换，则A的范数定义为

$$\|A\|=\sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x\in X, x\neq 0\right\},$$

其中$\|x\|$是X中的范数，$\|AX\|$是Y中的范数. 若$\|A\|<\infty$，则称A为有界线性变换.

§2.2 Hahn-Banach定理

定理 2 设X是赋范线性空间，N是X的一个子空间，$f(x)$是N上的一个有界线性泛函($f(x)$: $N\to \boldsymbol{C}$)，则存在一个X上的有界线性泛函$F(x)$($F(x)$: $X\to \boldsymbol{C}$)，使得当$x\in N$时$F(x)=f(x)$，且$\|F\|=\|f\|$. 我们称F为f的扩张.

证 (1)首先假设X是实数域$\boldsymbol{R}$上的赋范线性空间，此时f是$N\to\boldsymbol{R}$的实有界线性泛函。今证存在一个$F(x)$是$f(x)$的扩张.

若$\|f\|=0$即$f(x)=0$，$\forall x\in N$，则取$F=0$，F就是f的扩张.

若$\|f\|\neq 0$，可以假定$\|f\|=1$，因若$\|f\|\neq 1$，考虑$\frac{f}{\|f\|}$的扩张F，则$F_1=\|f\|F$即为f的扩张.

先将X的子空间N扩张一维，取$x_0\in X$但$x_0\notin N$，考虑$N_1=\{n+\alpha x_0 | n\in N, \alpha\in\boldsymbol{R}\}$，$N_1$是由$x_0$和$N$张成的空间，显然$N_1\supsetneqq N$. 现在找一个$N_1$上的线性泛函$G$，使得$G(x)=f(x)$，$\forall x\in N$，且$\|G\|$

$=\|f\|=1$. 利用G是线性的，有

$$G(n+\alpha x_0)=G(n)+\alpha G(x_0)=f(n)+\alpha G(x_0)=f(n)+\alpha r,$$

其中$r\in\boldsymbol{R}$. 这样得到的G显然是N_1上的线性泛函且$G(n)=f(n)$. 现在的问题是如何选取r使$\|G\|=1$.

由于G是f的扩张，故$\|G\|\geqslant\|f\|=1$，故只需选取r使得

$$|f(n)+\alpha r|\leqslant\|n+\alpha x_0\| \qquad \forall n\in N,\ \forall \alpha\in\boldsymbol{R}. \qquad (1)$$

成立. 当$\alpha=0$，$|f(n)|\leqslant\|n\|$显然成立. 当$\alpha\neq0$，令$n=\alpha n'$. 则(1)式成为

$$|f(\alpha n')+\alpha r|=|\alpha|\ |f(n')+r|\leqslant\|\alpha n'+\alpha x_0\|$$
$$=|\alpha|\ \|n'+x_0\|, \qquad \forall n\in N,\ \forall \alpha\in\boldsymbol{R}.$$

即 $\qquad |f(n')+r|\leqslant\|n'+x_0\|, \qquad \forall n\in N.$

此式归结为

$$r\leqslant-f(n')+\|n'+x_0\|=A_n',\ \forall n'\in N;$$
$$r\geqslant-f(n')-\|n'+x_0\|=B_n',\ \forall n'\in N.$$

为此需证明存在$r\in\boldsymbol{R}$使得对一切m, $n\in N$有

$$B_m\leqslant r\leqslant A_n$$

也就是说，当且仅当对所有的$m,n\in N$有$B_m\leqslant A_n$时，r才能存在. 但是

$$f(n)-f(m)=f(n-m)\leqslant\|n-m\|=\|n+x_0-m-x_0\|$$
$$\leqslant\|n+x_0\|+\|-m-x_0\|,$$

即 $\qquad -f(m)-\|m+x_0\|\leqslant-f(n)+\|n+x_0\|$

对一切m, n恒成立，所以r存在. 这就证明了G是f在N_1上的扩张.

考虑集族$\{N^\Delta,\ f^\Delta)\}$，其中$N^\Delta\supset N$且为X的子空间，f^Δ是$N^\Delta\to\boldsymbol{R}$的线性泛函满足$f^\Delta(x)=f(x)$, $\forall x\in N$, 且$\|f^\Delta\|=1$，则$(N_1,G)\in\{(N^\Delta,\ f^\Delta)\}$，故$\{(N^\Delta,\ f^\Delta)\}$是非空的.

在$\{(N^\Delta,\ f^\Delta)\}$上定义序：$(N^{\Delta1},\ f^{\Delta1})\prec(N^{\Delta2},\ g^{\Delta2})$是指$N^{\Delta1}\subset N^{\Delta2}$，而且当$x\in N^{\Delta1}$时，$f^{\Delta2}(x)=f^{\Delta1}(x)$. 显然$\{(N^\Delta,\ f^\Delta)\}$是半序的. 今取链$\{(N^{\Delta\alpha},\ f^{\Delta\alpha}),\ \alpha\in A\}$，则可以找到一个上界$(\widetilde{N},\ \widetilde{f})$，其中$\widetilde{N}=\bigcup N^{\Delta\alpha}$. 因为$\{N^{\Delta\alpha}\}$是一个链，故$\widetilde{N}$仍然是$X$的一个子空间，$\widetilde{f}$是$\widetilde{N}\to\boldsymbol{R}$的线性泛函且$\widetilde{f}(x)=f^{\Delta\alpha}(x)$，当$x\in$

$N^{\Delta a}$. 则显然$\widetilde{f}$是线性的，且$|\widetilde{f}(x)|=|f^{\Delta a}(x)|\leqslant\|x\|$，所以$\|\widetilde{f}\|\leqslant 1$．又$\widetilde{f}$是$f^{\Delta a}$的扩张，因此$\|\widetilde{f}\|\geqslant\|f^{\Delta a}\|=1$．故$\|\widetilde{f}\|=1$．由Zorn引理知$\{(N^{\Delta},f^{\Delta})\}$有一个极大元素$(M,F)$。可以断言$M=X$。否则可按以上方法找到一个$x_0\in X$，但$x_0\notin M$，再将$M$扩充一维，得到一个包含$M$及$x_0$的空间，从而将线性泛函$F$再扩张．这与$(M,F)$是极大元素是矛盾的．故$M=X$。

以上证明了Hahn-Banach定理对实数域上的赋范线性空间是成立的。

（2）设X是复数域$\boldsymbol{C}$上的赋范线性空间．f是$N\to\boldsymbol{C}$的有界线性泛函。设u是f的实部，容易验证$u(x)$为实线性泛函，即$u(x+y)=u(x)+u(y),\forall x,y\in N$，且$u(ax)=au(x)$，$\forall x\in N$，$\forall a\in\boldsymbol{R}$．且$|u(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|$．故$\|u\|\leqslant\|f\|$．$u(x)$是有界的．

$$f(\mathrm{i}x)=u(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}v(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}f(x)=\mathrm{i}(u(x)+\mathrm{i}v(x))$$
$$=-v(x)+\mathrm{i}u(x),$$

所以　　$v(x)=-u(\mathrm{i}x)$。

于是有　　$f(x)=u(x)-\mathrm{i}u(\mathrm{i}x)$．

又$u(x)$是$N\to R$的有界线性泛函，利用（1）的结论得到u的扩张$U(x)$，$U(x)$是$X\to\boldsymbol{R}$的线性泛函，且当$x\in N$，$U(x)=u(x)$，同时$\|U\|=1$．

今定义

$$F(x)=U(x)-\mathrm{i}U(\mathrm{i}x),\quad x\in X$$

容易验证F是X上的复线性泛函．首先，显然有

$$F(x+y)=F(x)+F(y).$$

再证　$F(ax)=aF(x)$，$\forall a\in\boldsymbol{C}$，$x\in X$．成立。

当　$\beta\in\boldsymbol{R}$，$F(\beta x)=U(\beta x)-\mathrm{i}U(\mathrm{i}\beta x)=\beta U(x)-\mathrm{i}\beta U(\mathrm{i}x)$
$$=\beta(U(x)-\mathrm{i}U(\mathrm{i}x))=\beta F(x).$$

又　$F(\mathrm{i}x)=U(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}U(-x)=U(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}U(x)=\mathrm{i}(U(x)-\mathrm{i}U(\mathrm{i}x))=\mathrm{i}F(x)$．

对任意$\alpha\in\boldsymbol{C}$，令$a=a_1+\mathrm{i}a_2$，a_1，$a_2\in\boldsymbol{R}$．则有

$$F(\alpha x)=F(\alpha_1 x+\mathrm{i}\alpha_2 x)=F(\alpha_1 x)+F(\mathrm{i}\alpha_2 x)$$
$$=\alpha_1 F(x)+\mathrm{i}F(\alpha_2 x_2)=\alpha_1 F(x)+\mathrm{i}\alpha_2 F(x)=\alpha F(x)$$

故$F(x)$是$X\to \boldsymbol{C}$的线性泛函.

当$x\in N$，时$U(x)=u(x)$，显然有$F(x)=f(x)$.

又$F(x)$是$f(x)$的扩张，所以$\|F\|\geqslant\|f\|$. 另外取$\theta=-\arg F(x)$，则

$$|F(x)|=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}F(x)=F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)=U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x)\leqslant\|U\|\ \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}x\|$$
$$=\|U\|\ |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\|x\|=\|U\|\ \|x\|=\|u\|\ \|x\|$$
$$\leqslant\|f\|\ \|x\|.$$

所以 $$\|F\|\leqslant\|f\|,$$

由此推出 $$\|F\|=\|f\|.$$

Hahn-Banach定理得证.

§2.3 Hahn-Banach定理的应用—Poisson积分

为将Hahn-Banach定理应用于具体问题，需要借助于赋范线性空间上有界线性泛函的知识.

如果X是一个赋范线性空间，X上全体有界线性泛函的集族记作X^*，则X^*是不空的. 因为泛函f：$X\to 0$是X^*中的一个元素. 在X^*中规定加法和数的乘法如下：假设f，$g\in X^*$，令

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x);$$

则X^*是一个线性空间. 又X^*上定义了范数$\|f\|$，所以X^*仍是一个赋范线性空间，事实上X^*是一个Banach空间：称X^*为X的共轭空间.

定理 3 设X是一个赋范线性空间，$x_0\in X$，$x_0\neq 0$，则存在一个$f\in X^*$，使得$\|f\|=1$，且$f(x_0)=\|x_0\|$.

证 考虑一维线性空间$A=\{\alpha x_0|\ \alpha\in \boldsymbol{C}\}$，作$A$上泛函$g(x)$：

$$g(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|,\quad x\in C;$$

则g是A上的有界线性泛函且$\|g\|=1$．由Hahn-Banach定理，存在一个$f\in X^*$，使得$f|_A=g$，且$\|f\|=1$，同时$f(x_0)=g(x_0)=\|x_0\|$。定理得证。

定理说明，对于任何一个不等于零的向量，都可以找到一个范数为1的有界线性泛函，将其映射到自己的范数上.

推论1　若$x,y\in X$且$x\neq y$，则存在$f\in X^*$使得$f(x)\neq f(y)$.

证　令$x_0=x-y$，则$x_0\neq 0$。由定理3知，存在$f\in X^*$使$f(x_0)=\|x_0\|\neq 0$，即$f(x-y)=f(x)-f(y)\neq 0$，所以$f(x)\neq f(y)$.

这个推论说明X^*在X上是分离两点的。

推论2　对于$x\in X$，有

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|\,|\,f\in X^*,\ \|f\|=1\}.$$

证　$|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|=\|x\|$，$\because\|f\|=1$.
所以

$$\sup\{|f(x)|\,|\,f\in X^*,\ \|f\|=1\}\leqslant\|x\|.$$

但由定理3知，对于$x_0\neq 0$，可以找到一个$f(x)$，使$f(x_0)=\|x_0\|$，且$\|f\|=1$，即至少可以找到一个$f\in X^*$，使$|f(x)|=\|x\|$，所以

$$\sup\{|f(x)|\,|\,f\in X^*,\ \|f\|=1\}\geqslant\|x\|.$$

由此得　$\|x\|=\sup\{|f(x)|\,|\,f\in X^*,\ \|f\|=1\}$.

推论2表明，对于固定的$x\in X$，映射$f\to f(x)$是X^*上一个范数为$\|x\|$的有界线性泛函，这个事实说明了X与X^*之间的相互对应关系.

下面通过Hahn-Banach定理导出Poisson积分公式。

设K是紧Hausdorff空间，H是K的紧子集，A是K上连续泛函$C(K)$的子空间，满足

(1)　$1\in A$，1是指$1(x)=1$，$\forall x\in K$，

(2)　$\|f\|_K=\|f\|_H$，$\forall f\in A$.

其中　$\|f\|_K=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in K\}$，$\|f\|_H=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in H\}$.

记$M=\{f|_H, f\in A\}$，则得定义在H上的连续泛函$C(H)$的子集合M，又M的每一个元素都有唯一的一个开拓使之成为A的元素：这是因为$|f(x)|\leqslant\|f\|_H$，故若对$y\in H$，有$f(y)=0$，则必对每一个$x\in K$有$f(x)=0$．这样就得到M与A之间的一个一一对应，且为保范的．

固定$x\in K$，作集合M到复数域$\boldsymbol{C}$上的映射γ：

γ：$f\to f(x)$，$f\in M$，$f(x)\in\boldsymbol{C}$．

则γ是M上的有界线性泛函．由$|f(x)|\leqslant\|f\|_M$知$\|\gamma\|\leqslant 1$，又由条件(1)知$\gamma(1)=1(x)=1$，所以$\|\gamma\|=1$．因为M是$C(H)$的子空间，在其上定义了有界线性泛函γ，由Hahn-Banach定理知，存在着$C(H)$上的有界线性泛函Φ，使得$\Phi|_M=\gamma$且$\|\Phi\|=1$．即

$$\Phi(f)=f(x),\quad\forall f\in M.$$

显然$\Phi(1)=1$.

下面证明$\Phi(1)=1$、$\|\Phi\|=1$蕴涵着Φ是$C(H)$上的正线性泛函，即对于$f\geqslant 0$有$\Phi(f)\geqslant 0$，取$f\in C(H)$，由于f在紧集上是有界的，不妨设$0\leqslant f\leqslant 1$，并令$g=2f-1$，则$-1\leqslant g\leqslant 1$，对于任意的实数r，都有$|g+ir|^2\leqslant 1+r^2$．故令$\Phi(g)=\alpha+i\beta$，α，$\beta\in\boldsymbol{R}$，则

$$\Phi(g+ir)=\alpha+i\beta+i\Phi(r)=\alpha+i\beta+ir\Phi(1)=\alpha+i(\beta+r).$$

故
$$|\Phi(g+ir)|^2=\alpha^2+(\beta+r)^2\geqslant(\beta+r)^2.$$

另一方面，$\|\Phi\|=1$，所以

$$|\Phi(g+ir)|^2\leqslant|g+ir|^2\leqslant 1+r^2.$$

于是得到$1+r^2\geqslant(\beta+r)^2$，即$1\geqslant 2\beta r+\beta^2$，对一切实数$r$成立，从而必然有$\beta=0$，即$\Phi(g)=\alpha$，又

$$|\alpha|=|\Phi(g)|\leqslant\|g\|\leqslant 1.$$

所以

$$\Phi(f)=\Phi\left(\frac{1}{2}(1+g)\right)=\frac{1}{2}(1+\Phi(g))=\frac{1}{2}(1+\alpha)>0.$$

这就证明了Φ为$C(H)$上正线性泛函．由第一章Riesz表示定理知，在H上存在一个正则的、正的Borel测度μ_x，使得

$$\Phi(f)=\int_H f\mathrm{d}\mu_x, \qquad f\in C(H).$$

特别．若$f\in A$有

$$f(x)=\int_H f\mathrm{d}\mu_x. \tag{2}$$

这样就证明了对每个$x\in K$，在H上存在一个正测度μ_x，通过(2)式用μ_x表示了$f(x)$。

注意有了Φ以后，就唯一确定了μ_x，但Φ是由ν扩张而得到的，Hahn-Banach定理并不保证扩张的唯一性，因而μ_x不必是唯一的。

令 $U=\{z\in \boldsymbol{C} \mid \|z\|<1\}$, $\overline{U}=\{z\in\boldsymbol{C} \mid \|z\|\leqslant 1\}$,
$T=\{z\in \boldsymbol{C} \mid \|z\|=1\}$.

取$K=\overline{U}$，由于$\overline{U}$是复数域上的有界闭集，故为紧的。令$H=T$，即H为U的边界。取A为K上的所有的多项式，显然为连续的。容易验证A满足以上条件(1)，(2)；因为

(1) $1(x)=1\in A$（零次多项式）.

(2)若$f\in A$则$\|f\|_K=\|f\|_{\overline{U}}=\|f\|_H=\|f\|_T$。这是由解析函数的最大模原理给出的。

若取$z\in U$，$z=re^{i\theta}$，$0\leqslant r<1$，$\theta\in\boldsymbol{R}$由以上结论知存在正则Borel测度μ_z，使得

$$f(z)=\int_T f\mathrm{d}\mu_z, \qquad (f\in A).$$

今取多项式$u_n(z)=z^n$（$n=0$、1、2、…），$u_n\in A$，代入上式得

$$r^n e^{in\theta}=\int_T u_n\mathrm{d}\mu_z,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

又在T上 $u_{-n}=\overline{u_n}$。所以

$$r^n e^{-in\theta}=\int_T u_{-n}\mathrm{d}\mu_z, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

二者合并写成

$$r^{|n|}e^{in\theta}=\int_T u_n\mathrm{d}\mu_z, \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

令 $$P_r(\theta-t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}, \qquad t\in \boldsymbol{R}. \qquad (3)$$

因$|r|<1$，故级数绝对收敛，乘以e^{ikt}逐项积分得，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)\ e^{ikt}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}r^{|n|}e^{in\theta}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)t}dt.$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-n)t}dt=\begin{cases}0, & \text{当} n\neq k;\\ 2\pi, & \text{当} n=k.\end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)e^{ikt}dt=r^{|k|}e^{ik\theta}.$$

即 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)e^{int}\ dt=\int_T u_n\mathrm{d}\mu_z,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

又 $u_n=z^n$，也就是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(e^{int})\mathrm{d}t=\int_T f\mathrm{d}\mu_z$$

对$f=u_n$成立，因此对每个三角多项式f也成立；再根据Fourier级数理论知，上式对一切连续函数都成立，此时μ_z由(2)式唯一决定。

特别若取$f\in A$，得

$$f(z)=\int_T f\mathrm{d}\mu_z=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.$$

将(3)式中级数求和得

$$P_r(\theta-t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

代入上式，即得Poisson积分公式。

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}f(\mathrm{e}^{it})\mathrm{d}t.\quad(z=re^{i\theta})$$

对每个$f\in A$，$z\in U$都成立。这个公式说明$f(z)$在U上的函数值可以由它在边界上的值所确定。

注意，还可以将A扩大，只要A满足条件(1)、(2)即可。例如可以考虑任意的解析函数。

§2.4 完备度量空间的两个定理

定义3 集合$E\subset X$称为无处稠密的，如果它的闭包$\overline{E}$不包含X的非空开集，即$\overline{E}$不包含内点。

定义4 若集合E是可数个无处稠密的集合的并，即若$E_n(n=1,2,\cdots)$为无处稠密的，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则$E$称为第一纲的，$X$的其它集合称为第二纲的。

定理4 (Baire定理)，设X是完备度量空间，V_1，$V_2,\cdots$，$V_n,\cdots$是X中的稠密开子集，则其交集$\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$在$X$中稠密。

证 取$W\neq\phi$是X的任一开集，必须证明$(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n)\cap W\neq\phi$.

设ρ是X的度量，记

$$S(x, r)=\{y\in X, \rho(x, y)<r\},$$

并记$\overline{S}(x, r)$为$S(x, r)$的闭包.

由假设V_1是稠密的，$V_1\cap W\neq\phi$，又V_1是开集，故$V_1\cap W$是开集. 因此存在$x_1\in X$及实数r_1，$0<r_1<1$，使得

$$\overline{S}(x_1, r_1)\subset V_1\cap W. \tag{4}$$

由V_2的稠密性，得$V_2\cap S(x_1, r_1)\neq\phi$，且$V_2\cap S(x_1, r_1)$是开集. 于是存在$x_2\in X$，及实数$r_2$，$0<r_2<\frac{1}{2}$使得

$$\overline{S}(x_2, r_2)\subset V_2\cap S(x_1, r_1).$$

继续以上作法，若x_n，r_n已选出，$x_n\in X$，$0<r_n<\frac{1}{n}$，由V_{n+1}的稠密性，得到$x_{n+1}\in X$，$0<r_{n+1}<\frac{1}{n+1}$，使得

$$\overline{S}(x_{n+1}, r_{n+1})\subset V_{n+1}\cap S(x_n, r_n). \tag{5}$$

考虑序列$\{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$，当$i$，$j>n$时$x_i$，$x_j$皆在$S(x_n, r_n)$内，故$\rho(x_i, x_j)<\frac{2}{n}$，从而$\{x_n\}$是Canchy序列，根据度量空间的完备性知. 存在$x\in X$，使$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

由以上作法知

$$\overline{S}(x_1, r_1)\supset\overline{S}(x_2, r_2)\supset\cdots\supset\overline{S}(x_n, r_n)\supset\cdots,$$

即 $\quad x_m\in\overline{S}(x_k, r_k), \qquad m\geqslant k, \ k=1, 2, \cdots$

又$\overline{S}(x_k, r_k)$是闭集合，所以$x\in\overline{S}(x_k, r_k)$，$k=1,2,\cdots$.

再由(5)式知，$x\in V_k$，$k=1,2,\cdots$. 因此$x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}V_k$. (4)式表明

$x\in W$，故 $\quad x\in\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}V_k\right)\cap W$. 即$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}V_k$是稠密的。

推论3 在完备度量空间中，任意可数个稠密的G_δ集之交还是稠密的G_δ集。

定理5 完备度量空间是第二纲的.

证 用反证法。假设完备度量空间X是第一纲的，即X是可数个无处稠密集合K_n的并集，即

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n,$$

则

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}.$$

取余集得

$$\phi=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}^{C}.$$

因为K_n无处稠密$\overline{K_n}$不包含任何非空开集，所以$\overline{K_n}^{c}$是稠密的，又$\overline{K_n}^{c}$是开集，由Baire定理知$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}^{c}$是稠密的，与$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{K_n}^{c}=\phi$矛盾。故$X\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$，即X是第二纲的。证毕。

§2.5 Banach-Steinhaus定理

定理 6 （Banach-Steinhaus定理，共鸣定理）

设X是Banach空间，Y是赋范线性空间，$\{\Lambda_\alpha\}$是X到Y的一族有界线性算子。α取值于某个指标集A。则下面结论之一成立。

（1）或者存在$M>0$，使得

$$\|\Lambda_\alpha\|\leqslant M,\quad\forall\alpha\in A;$$

（2）或者存在一个稠密的G_δ集V，使得

$$\sup_{\alpha}\|\Lambda_\alpha x\|=\infty,\quad\forall x\in V.$$

证 $\|\Lambda_\alpha\|=\sup\left\{\frac{\|\Lambda_\alpha x\|}{\|x\|}\mid x\neq 0\right\}.$

令
$$\varphi(x)=\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha x\|,\qquad x\in X.$$

作集合 $V_n=\{x\in X \mid \varphi(x)>n\}$，　$n=1, 2, \cdots$

因为Λ_α是X到Y的有界线性算子，故为连续的。又$\|\Lambda_\alpha X\|$是Y上的连续函数，所以$X\to\|\Lambda_\alpha x\|$是X到R的连续映射。因此φ是下半连续的，并且V_n为开集。

下面讨论两种情形。

（1）假设对某一个N，V_N不稠密于X，则$\overline{V}_N\neq X$，故必存在一个非空开集w，使得$w\cap\overline{V}_N=\phi$，于是有

$\overline{V}_N^C\supset w\supset\overline{S}(x_0, r)$，$r$为某一确定常数。当$x\notin V_N$则$\varphi(x)\leqslant N$，即$\|\Lambda_\alpha x\|\leqslant N$，$\forall\alpha\in A$。因为$\overline{S}(x_0, r)\subset\overline{V}_N^C$，故$x_0\in\overline{V}_N^C$，即　$x_0\notin V_N$。所以

$$\|\Lambda_\alpha x_0\|\leqslant N, \qquad \forall\alpha\in A.$$

当　$\|x\|\leqslant r$　则$x+x_0\in\overline{S}(x_0, r)$，所以$\|\Lambda_\alpha(x+x_0)\|\leqslant N$，于是

$$\|\Lambda_\alpha x\|\leqslant\|\Lambda_\alpha(x+x_0)\|+\|\Lambda_\alpha(-x_0)\|\leqslant 2N.$$

对任意的$x\in X$，令　$x'=\dfrac{x}{\|x\|}r$，则$\|x'\|=r$，所以

$$\left\|\Lambda_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}r\right)\right\|\leqslant 2N, \qquad \forall\alpha\in A.$$

即
$$\|\Lambda_\alpha x\|\leqslant\frac{2N}{r}\|x\|, \qquad \forall\alpha\in A.$$

由此得出$\|\Lambda_\alpha\|\leqslant\dfrac{2N}{r}$对一切$\alpha$成立。即结论1）对$M=\dfrac{2N}{r}$成立。

（2）与（1）相反，若对一切n，V_n在X中稠密，由Baire定理$V=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$是$X$中的稠密的$G_\delta$集，取$x\in V$，则对一切$n$，$x\in V_n$，即$\varphi(x)=\infty$。即存在一个稠密的$G_\delta$集$V$，使得

$$\sup_n \| \Lambda_n x \| = \infty, \qquad \forall x \in V.$$ 定理得证。

这个定理也称为一致有界性原理。

下面借助于Banach-Steinhaus定理讨论连续函数的 Fourier 级数的收敛问题。

设T是单位圆$T=\{z\in \mathbf{C} \mid \|z\|=1\}$。问题是：对每一个$f\in C(T)$，$f$的Fourier级数在每一点是否皆收敛于$f$？

显然$C(T)$为Banach空间，其范数为

$$\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(z)| \mid z\in T\}.$$

为方便起见，通常将定义在单位圆上的连续实函数$f(z)$用$z=e^{it}$置换为周期为2π的实连续函数$f(e^{it})$，我们仍记作$f(t)$.

f的Fourier系数为

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

Fourier级数为

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{inx}.$$

f的Fourier级数在x点的n项和$S_n(f,x)$为

$$S_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt \quad n=0,1,2,\cdots.$$

其中
$$D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$

问题在于判断$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(f,x)=f(x)$是否对每个函数$f\in C(T)$和每个实数$x$皆成立。若在$L^2$空间范数意义下，已知

$$\|f-S_n\|_2\to 0, \text{ 当 } n\to\infty,$$

则由第一章定理18知，存在$\{S_n\}$的一个子序列，它几乎处处收敛

于$f(x)$. 但并没有回答上面提出的问题.

下面利用Banach-Steinhaus定理解决这个问题，仅考虑$x=0$的情形. 引入算子Λ_n:

$$\Lambda_n f=S_n(f,\ 0),\ f\in C(T).$$

容易验证Λ_n是线性的. 下面验证Λ_n有界.

$$|\Lambda_n f|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\ |D_n(-t)|\ dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\|f\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt=\|f\|_\infty\|D_n\|_{L^1}.$$

所以

$$\|\Lambda_n\|\leqslant\|D_n\|_{L^1}. \qquad (6)$$

因此每个Λ_n是$C(T)$上的有界线性泛函.

下面证明两个事实:

(1)当$n\to\infty$时$\|D_n\|_{L^1}\to\infty$

(2)$\|\Lambda_n\|=\|D_n\|_{L^1}$, $\forall n$.

先证(1). 由分析知

$$D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

$$\|D_n\|_{L^1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| \cdot \frac{dt}{t}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} |\sin t| \frac{dt}{t}$$

$$>\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, dt$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{当 } n\to\infty.$$

再证(2)。因 $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$ 时正时负，今定义函数

$g(t)$：

$$g(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } D_n(t)\geqslant 0,\\ -1, & \text{当 } D_n(t)<0.\end{cases}$$

于是 $$g(t)D_n(t)=|D_n(t)|.$$

又 $g(t)$ 可以用连续函数来逼近，即存在 $f_j\in C(T)$，使 $-1\leqslant f_j\leqslant 1$，且 $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)=g(x)$. 由Lebesgue控制收敛定理知

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)D_n(-t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(-t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt=\|D_n\|_{L^1}.$$

再考虑(6)式，得 $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_{L^1}$.

由(1)，(2)两个结论成立，表明 $\{\|\Lambda_n\| \mid n=1, 2, \cdots\}$

不是一致有界的，根据Banach-Steinhaus定理，在$C(T)$内存在稠密的G_δ集合E，使得

$$\sup_n\{|\Lambda_n f|\}=\infty,\ \forall f\in E.$$

这说明，E中的一切函数f，使$\Lambda_n f=s_n(f,\ 0)$无上界，即$S_n(f,0)$发散。这一事实表明在单位圆上有足够多的连续函数f，使得$s_n(f,0)$不收敛于$f(0)$。

我们选取$x=0$是为了方便，显然对任意x，以上结论是成立的。即对每个实数x，在$C(T)$中存在一个稠密的G_δ集E_x，对于每个$f\in E_x$，它的Fourier级数在x点是发散的。这就是说我们提出的问题，其答案是否定的。

§2.6 开映射定理

定理7 设X，Y是Banach空间，U、V分别为X、Y空间的开单位球，Λ为X到Y的有界线性变换且为映上的。则对于每一个Λ，相应地存在一个$\delta>0$，使得

$$\Lambda(U)\supset\delta V.$$

其中 $\delta V=\{\delta y\mid y\in V\}=\{z\in V|\ \|z\|<\delta\}$。

即对于每个$y\in Y$，$\|y\|<\delta$，必有$x\in X$，$\|x\|<1$，且$\Lambda x=y$。

证 因为Λ: $X\to Y$是映上的，故任给$y\in Y$，存在$x\in X$使$\Lambda x=y$，取$k>\|x\|$，则$x\in kU$，故$y=\Lambda x\in\Lambda(kU)$。所以$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda(kU)$。又$Y$是完备的，则至少存在一个$k$，$\Lambda(kU)$不是无处稠密的。否则对一切$k$，$\Lambda(kU)$都是无处稠密的，则$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Lambda(kU)$是第一纲的，与$Y$是完备的相矛盾。故存在一个非空开集$W$含于某个$\Lambda(kU)$闭包内：$\overline{\Lambda(kU)}\supset W$。

因为W是开集合，所以存在$y_0\in Y$，$\eta>0$使得$\overline{S}(y_0,\ \eta)\subset$

W。即存在k，y_0，η，使得$\overline{\Lambda(kU)}\supset S(y_0, \eta)$，也就是说，存在$x_n'$ $\in X$，$\|x_n'\|<k$且$\Lambda x_n'\to y_0$。

若$\|y\|<\eta$，则$y_0+y\in S(y_0, \eta)$，由以上讨论知，存在x_n'' $\in X$，$\|x_n''\|<k$，且$\Lambda x_n''\to y+y_0$。

令$x_n=x_n''-x_n'$，则$\|x_n\|\leqslant\|x_n''\|+\|x_n'\|<2k$，且$\Lambda x_n=\Lambda x_n''-\Lambda x_n'\to y$。

以上事实表明，存在着正整数k及$\eta>0$，使对任意$y\in Y$满足$\|y\|<\eta$，及任意的$\varepsilon>0$，都有$x\in X$，满足$\|x\|<2k$且$\|y-\Lambda x\|<\varepsilon$。

对任意$y\in Y$，$y\neq 0$，令$z=\dfrac{\eta}{\|y\|}y$，则$\|z\|<\eta$，

取 $\varepsilon'=\dfrac{\eta}{\|y\|}\varepsilon$，则存在$w\in X$满足$\|w\|<2k$且$\|z-\Lambda w\|<\varepsilon'$，令 $x=\dfrac{\|y\|}{\eta}w$，则 $\|x\|<\dfrac{2k}{\eta}\|y\|$，且$\|y-\Lambda x\|<\varepsilon$。

归纳以上结果，我们得到：对每个$y\in Y$，$y\neq 0$和每个$\varepsilon>0$，存在$x\in X$，使得

$$\|x\|<\theta^{-1}\|y\| \quad 及 \quad \|y-\Lambda x\|<\varepsilon,$$

其中 $\theta=\dfrac{\eta}{2k}$.

取定 $y\in\theta V$，$\varepsilon=\dfrac{1}{2}\theta$，则有$x_1\in X$，使得

$$\|x_1\|<\theta^{-1}\|y\|<1 \quad 及 \quad \|y-\Lambda x_1\|<\frac{1}{2}\theta.$$

又 $y-\Lambda x_1\in Y$， 再取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2^2}\theta$，则存在$x_2\in X$，使得

$$\|x_2\|<\theta^{-1}\|y-\Lambda x_1\|<\frac{1}{2} \quad 及 \quad \|y-\Lambda x_1-\Lambda x_2\|<\frac{1}{2^2}\theta.$$

继续作下去，若x_1，x_2，$\cdots x_n \in X$已取定且 $\|x_m\| < \frac{1}{2^{m-1}}$ ($m=1, 2, \cdots, n$) 使得 $\|y - \Lambda x_1 - \cdots - \Lambda x_n\| < \frac{1}{2^n}\theta$. 则由 $y - \Lambda x_1 - \cdots - \Lambda x_n \in Y$，取 $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}\theta$则存在$x_{n+1} \in X$，使得

$$\|x_{n+1}\| < \theta^{-1}\|y - \Lambda x_1 - \cdots - \Lambda x_n\| < \frac{1}{2^n}，且\|y - \Lambda x_1 - \cdots - \Lambda x_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}}\theta.$$

令 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，则$\{S_n\}$满足

$$\|S_{m+q} - S_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_{m+q}\| < \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{m+q-1}}$$

$\to 0$，当m，$q \to \infty$. 即$\{S_n\}$是X中的Cauchy序列，由X的完备性知，存在$x \in X$ 使 $S_n \to x$. 又 $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$，而$\|S_n\| < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2$. 所以$\|x\| \leqslant 2$. 又由于$\Lambda$是连续的 $\Lambda S_n \to \Lambda x$. 又$\|y - \Lambda S_n\| < \frac{1}{2^{n+1}}\theta$. 故$\Lambda S_n \to y$. 所以

$$y = \Lambda x.$$

即任给$y \in \theta V$，则存在$x \in X$满足$\|x\| \leqslant 2$，且 $\Lambda x = y$.

所以 $\Lambda(3U) \supset \theta V$. 即 $\Lambda(U) \supset \frac{\theta}{3}V$. 故 $\delta = \frac{\theta}{3}$. 定理得证.

定理 8 若X、Y是Banach空间，Λ是X到Y的有界线性变换且为映上的和一一的，则存在$\delta > 0$，使

$$\|\Lambda x\| \geqslant \delta \|x\|, \quad \forall x \in X$$

也就是说，Λ^{-1}是Y到X的有界线性变换且为映上的.

证 由开映射定理及Λ是一一的知，$\|\Lambda x\| < \delta$蕴涵着$\|x\| < 1$，这是因为$\Lambda(U) \supset \delta V$，且只有一个$x$与$\delta V$中的$y$相对应. 所以若$\|x\| \geqslant 1$则$\|\Lambda x\| \geqslant \delta$.

任给$x \in X$，则$\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ 所以 $\left\| \Lambda\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geqslant \delta$. 即

$$\|\Lambda x\| \geqslant \delta \|x\|.$$

变换Λ^{-1}在Y上可以这样定义：若$y = \Lambda x$时，则$\Lambda^{-1} y = x$，容易验证Λ^{-1}是线性的. 又由$\|\Lambda x\| \geqslant \delta \|x\|$，得$\|y\| \geqslant \delta \|\Lambda^{-1} y\|$，即$\|\Lambda^{-1} y\| \leqslant \dfrac{1}{\delta} \|y\|$. 所以$\|\Lambda^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\delta}$. 定理得证.

下面利用以上定理讨论L^1函数和它的Fourier系数的关系. 设空间$T = \{z \in \boldsymbol{C} \mid \|z\| = 1\}$，考虑$L^1(T)$中的函数$f$. 其Fourier系数为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int} \mathrm{d}t, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

f的L^1范数取为 $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, \mathrm{d}t$.

由Riemann-Lebesgue引理知，对于$f \in L^1(T)$，当$n \to \pm\infty$时，$\hat{f}(n) \to 0$. 现在提出相反的问题：若$\{\varphi(n)\}$是一个复数序列，当$n \to \pm\infty$时$\varphi(n) \to 0$，那么是否有$f \in L^1(T)$，其Fourier系数$\hat{f} = \varphi$，也就是说满足以上条件的φ是否都可以作为Fourier系数.

借助于开映射定理可以证明答案是否定的. 令

$$C_0 = \{\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \mid \varphi(n) \to 0, \text{当} n \to \pm\infty\},$$

在C_0中定义范数

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(n)| : n \in \boldsymbol{Z}\},$$

则C_0是一个Banach空间. 实事上，将整数$\boldsymbol{Z}$看成拓扑空间，则按以上范数收敛必为一致收敛. 故若$\varphi_k(n) \to \varphi(n)$，则由$n \to \pm\infty$时

$\varphi_k(n)\to 0$，必有当$n\to\infty$时$\varphi(n)\to 0$。即得C_0的完备性。

定义$L^1(T)$到C_0的算子Λ：即Λ为$f\to\hat{f}$的映射。容易验证Λ为线性的。又

$$\|\hat{f}\|_\infty=\sup\{|\hat{f}(n)|:n\in \boldsymbol{Z}\}$$

而 $$|\hat{f}(n)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\ |e^{-int}|\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt=\|f\|_1,$$

所以

$$\|\hat{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_1.$$

即Λ是有界线性算子，$\|\Lambda\|\leqslant 1$。

再证明Λ是一一的，即$\hat{f}=0$蕴涵着$f=0$。若$\hat{f}(n)=$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt=0$对一切$n\in \boldsymbol{Z}$成立，则对于一切三角多项式$g(t)$有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt=0.$$

又由Weierstrass一致逼近定理知，对于区间$[-\pi,\pi]$上的连续函数$z(t)$，满足$z(-\pi)=z(\pi)$，一定可以找到一个三角多项式在该区间上一致地逼近$z(t)$，所以对于连续函数$z(t)$有$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)z(t)dt=0$，由此推知$f(t)=0$. a. e. 因否则若在一个测度大于0的集合$E$上$f(t)\neq 0$，不妨设$f(t)>0$。则可作一连续函数$g(t)$：当$x\in E$，$g(t)>0$，当$x\notin E$，$g(t)=0$，于是$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt>0$，与前面结论矛盾。故$f(t)=0$。即$\Lambda$是$L^1(T)$到$C_0$的一一对应的映射。

现在的问题是Λ是否是映上的，即Λ是否是$L^1(T)$到C_0上的一

一有界线性变换。

若Λ是$L^1(T)$到C_0上的一一有界线性变换，由定理8知Λ^{-1}是有界的，即存在$c>0$使

$$\|f\|_1 \leqslant c\|\hat{f}\|_\infty, \qquad \forall f \in L^1(T).$$

但这是不可能的。因为由§2.5知

$$D_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \in L^1(T),$$

而当$n\to\infty$时$\|D_n\|_1\to\infty$。又

$$|\hat{D}_n(l)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) e^{-ilt} dt \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left| \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt \right|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } l > n; \\ 1 & \text{当 } l < n. \end{cases}$$

所以

$$\|\hat{D}_n\|_\infty = \sup_l \{ |\hat{D}_n(l)| ; l \in Z\} = 1.$$

故$\|D_n\|_1 \leqslant C\|\hat{D}_n\|_\infty$是不可能的。因此$\Lambda$不是一一的，即存在$\varphi \in C_0$，对于任意的$f\in L^1(T)$，$\varphi \neq \hat{f}$。

第三章　Banach代数

在复数域上的向量空间A中引入满足结合律和分配律的乘法运算，A就构成一个复代数。若在A中再定义范数使A成为一个赋范线性空间且范数满足$\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$，则$A$成为一个赋范线性代数，若$A$又是完备的，就称$A$为Banach代数。

本章介绍Banach代数的基本理论，它包含了代数性质和拓扑性质之间的相互关系。谱理论揭示了Banach代数和解析函数之间的密切关系。同时还将着重介绍可交换的Banach代数的Gelfand表示理论。

§3.1　基本概念

定义1　在Banach空间A上定义乘法，满足结合律和分配律，即

$$(xy)z=x(yz),$$

$$x(y+z)=xy+xz,\ (y+z)x=yx+zx,$$

对$x,y,z\in A$成立，并且与数$\alpha\in \boldsymbol{C}$的乘法满足

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y),\ \forall x,\ y\in A.$$

同时乘积的范数满足

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\ \|y\|,\ \forall x,\ y\in A,$$

则称A为一个Banach代数。

若x，$y\in A$有$xy=yx$，则称A为可交换的Banach代数，若存在着一个元素e，使得

$$xe=ex=x$$

对$x\in A$成立，则称e为A的单位元素，简称单元.

容易看出，若A有单位元素则必是唯一的。这是因为若e'是另一个单位元素，则$e'=e'e=e$。同时A的单位元素的范数不小于一，事实上$\|e\|=\|e^2\|\leqslant\|e\|\|e\|$。所以$\|e\|\geqslant 1$

下面给出几个Banach代数的例子。

例1 复数域C，，若以其元素的模为范数

$$\|\alpha\|=\|x+iy\|=|x+iy|=x^2+y^2,$$

则C构成一个具有单位元素的可交换的Banach代数。

另外，若取四倍的模作为范数

$$\|\alpha\|=\|x+iy\|=4|x+iy|$$

则C仍为一个有单位元素的可交换的Banach代数．因为$4|\alpha\beta|\leqslant 4|\alpha|\cdot 4|\beta|$，故$\|\alpha\beta\|\leqslant\|\alpha\|\|\beta\|$仍成立。

显然，以上模的倍数必须不小于1，否则$\|e\|\geqslant 1$将不能满足。

例2 若X是一个拓扑空间，$C(X)$是定义在X上的有界连续函数组成的线性空间，取范数为

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|,\ x\in X\}$$

则知$C(X)$为一个Banach空间，若定义乘法

$$(fg)(x)=f(x)g(x),\ f,\ g\in C(X),\ x\in X$$

则$C(X)$是一个Banach代数．它是可交换的，且具有单位元素$1(x)=1$.

例3 设X是一个局部紧空间，若$f\in C(X)$满足：对任意的$\varepsilon>0$，存在一个紧集$K\subset X$，使得$|f(x)|<\varepsilon$对一切$x\notin K$成立，则我们说"f在∞点为0"．

考虑函数集合

$$C_\infty(X)=\{f\in C(X),\ f\text{在}\infty\text{点为}0\},$$

显然$C_\infty(X)$是$C(X)$的一个闭子空间。若仍用$C(X)$中的乘法定义$C_\infty(X)$中的乘法，则$C_\infty(X)$就是$C(X)$的一个闭子代数，它也是可交换的，但没有单位元素。

若X是紧空间，则$C_\infty(X)=C(X)$，所以$C_\infty(X)$有单位元素的充分必要条件为X是紧空间。

例4 具有离散拓扑的整数集上的Banach代数。

若取$X=\mathbf{Z}$，具有离散拓扑，于是$\mathbf{Z}$的每一个子集皆为开集，对每一点$n\in\mathbf{Z}$来说必有含n在内的一个开集，它就是单点集$\{n\}$，$\{n\}$显然是紧的，故$\mathbf{Z}$是局部紧的，考虑函数f：$\mathbf{Z}\to\mathbf{C}$，则由于$\mathbf{Z}$有离散拓扑，f必为连续的，此时$C(\mathbf{Z})$就是$\mathbf{Z}$上的有界函数，若记$f(n)$为f_n，则$C(\mathbf{Z})$就是有界序列$\cdots,f_{-2}$，f_{-1}，f_0，f_1，f_2，$\cdots$组成的空间，记作l^∞、l^∞必为可交换的具有单位元素的Banach代数。

记$C_\infty(\mathbf{Z})=C_0=\{\psi:\mathbf{Z}\to\mathbf{C}\mid\psi(n)\to 0$，当$n\to\pm\infty\}$，$C_0$也是可交换的Banach代数，但无单位元素。

还可以考虑空间l^1：

$$l^1=\left\{f:\ \mathbf{Z}\to C\ \middle|\ \sum_{-\infty}^{\infty}|f_n|<\infty\right\}.$$

取范数$\|f\|_1=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n|$，则$L^1$为一个Banach空间。

若以卷积定义乘法，即定义

$$(f*g)(n)=(f*g)_n=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_jg_{n-j}.$$

容易验证L^1是一个可交换的Banach代数，具有

$$\text{单位元素}e(n)=e_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}$$

例5 局部紧群上的Banach代数。

若G是一个群（例如乘法群），同时G又是一个拓扑空间，而且关于群的运算是连续的，即$(x,\ y)\to xy$及$x\to x^{-1}$是连续的，则称G是一个拓扑群（详细讨论见第六章）。

例如$\mathbf{Z}$是一个加法群，在$\mathbf{Z}$上取离散拓扑，则$\mathbf{Z}$是局部紧的拓扑

空间，故称$\boldsymbol{Z}$为局部紧群.

又如实数集$\boldsymbol{R}$，规定通常拓扑，对于加法也是一个局部紧群.

对于局部紧群，Haar证明了一个重要事实："在每一个局部紧群G上，存在着左不变或右不变测度"。即若$A\in G$，则存在测度μ，具有如下性质：

$$\mu(A)=\mu(xA)\quad(\mu(A)=\mu(Ax)),\ x\in G$$

（第六章中将证明这一事实）.

例如$\boldsymbol{R}$为加法群，取$A\in\boldsymbol{R}$，定义

$$A+x=\{a+x\mid a\in A\},$$

则有Lebesgue测度μ，使得$\mu(A)=\mu(A+x)$，即测度μ关于坐标平移是不变的.

$\boldsymbol{Z}$的计数测度μ关于平移也是不变的.

$\boldsymbol{R}$是局部紧群，在$\boldsymbol{R}$上定义$L^1(\boldsymbol{R})$：

$$L^1(\boldsymbol{R})=\{f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}\mid\int_{\mathbf{R}}|f|\,dx<\infty\}.$$

取范数

$$\|f\|_1=\int_{\mathbf{R}}|f|\,dx,$$

并以卷积定义乘法：

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}}f(y)g(x-y)dy.$$

则$L^1(\boldsymbol{R})$是一个Banach代数.

在任意局部紧群G上也可以定义$L^1(G)$：

$$L^1(G)=\{f:\ G\to\boldsymbol{C}\mid\int_G|f|\,d\mu<\infty\},$$

并在$L^1(G)$上定义乘法为卷积：

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y),$$

则$L^1(G)$是一个Banach代数.

例 6 一个不可交换的Banach代数。

设X是维数大于 1 的Banach空间，则$X\to X$ 的全体有界线性算子组成的一个Banach代数是不可交换的.

例如考虑一个二维复向量空间 $X\{(\alpha_1, \alpha_2)|\alpha_1, \alpha_2\in \boldsymbol{C}\}$。则$X\to X$的线性变换对应一个矩阵。用通常的加法和数乘定义线性变换的相加和数乘运算。若T：$X\to X$，S：$X\to X$为二线性变换，定义ST为二变换的复合$S\circ T$，则$S\circ T$对应的矩阵为S和T所对应的二矩阵之积，故为不可交换的；但恒等变换为其单位元素。

由Banach代数定义中范数的性质$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|$知，乘法运算为连续的。即若$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$x_ny_n\to xy$。这由关系式

$$\begin{aligned}\|x_ny_n-xy\| &\leqslant \|x_ny_n-x_ny\|+\|x_ny-xy\|\\ &\leqslant \|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|\end{aligned}$$

可立即得到。

若e为Banach代数的单位元素，显然有$\|e\|\geqslant 1$，又由例 1 看出$\|e\|$可能大于 1，可以证明，一定有拓扑等价的范数，使单位元素 e 的范数等于 1.

设 e 为Banach代数A的单位元素，$\|e\|=c\geqslant 1$，今定义另一个范数，记作$|\!|\!|x|\!|\!|$.

$$|\!|\!|x|\!|\!|=\sup\{\|xy\| \mid \|y\|=1\}=\sup\left\{\frac{\|xy\|}{\|y\|}\,\middle|\, y\neq 0\right\}$$

容易验证$|\!|\!|x|\!|\!|$为范数.

下面证明$|\!|\!|x|\!|\!|$和$\|x\|$是等价的.因为,当$\|y\|=1$时$\|xy\|\leqslant\|x\|\|y\|=\|x\|$，所以

$$|\!|\!|x|\!|\!|=\sup\{\|xy\| \mid \|y\|=1\}\leqslant\|x\|.$$

另外 $\left\|x\cdot\frac{e}{c}\right\|=\left\|\frac{x}{c}\right\|=\frac{1}{c}\|x\|$，取 $y=\frac{e}{c}$时，则$\|y\|=1$，得$|\!|\!|x|\!|\!|\geqslant\left\|x\cdot\frac{e}{c}\right\|=\frac{1}{c}\|x\|$.

于是有 $\frac{1}{c}\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant\|x\|$，或 $|||x|||\leqslant\|x\|\leqslant c|||x|||$。所以 $|||x|||$ 和 $\|x\|$ 等价. 此时

$$|||e|||=\sup\{\|ey\|\mid\|y\|=1\}=\sup\{\|y\|\mid\|y\|=1\}=1.$$

容易验证A关于范数 $|||\cdot|||$ 仍为一个Banach代数.

假设A是没有单位元素的Banach代数，我们可以将A扩大，使之成为一个具有单位元素的Banach代数.

令 $A_e=\{(x,\ \alpha)|\ x\in A,\ \alpha\in\boldsymbol{C}\}$,

定义加法、数乘、乘法运算及范数如下.

$$(x,\ \alpha)+(y,\ \beta)=(x+y,\ \alpha+\beta);$$
$$\beta(x,\ \alpha)=(\beta x,\ \beta\alpha);$$
$$(x,\ \alpha)(y,\ \beta)=(xy+\beta x+\alpha y,\ \alpha\beta);$$
$$\|(x,\ \alpha)\|=\|x\|+|\alpha|;$$

其中$x,\ y\in A,\ \alpha,\ \beta\in\boldsymbol{C}$.

容易验证（留给读者）A_e是一个Banach代数，其单位元素为$(0,\ 1)$，即$e=(0,\ 1)$且$\|e\|=1$.

每个$x\in A$，可以想象成A_e中的元素$(x,\ 0)$，即

$$x\longrightarrow(x,\ 0),$$

这个对应将A对应A_e，是一一的，保持所有的代数运算，保持范数，将A嵌入A_e. A是A_e的一个闭子代数.

再来考虑Banach代数A上的线性泛函. 由于在A上定义了乘法，若φ为A上的泛函，满足$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$对一切$x,\ y\in A$成立，则称$\varphi$保持乘法运算，如果$\varphi$为$A$上的线性泛函且保持乘法运算，则称$\varphi$是$A$到复数域$\boldsymbol{C}$的代数同态，简称为Banach代数$A$上的复同态.

定理 1 若A是Banach代数，φ是A到复数域$\boldsymbol{C}$的代数同态，则作为线性泛函，$\|\varphi\|\leqslant 1$.

证 用反证法，若$\|\varphi\|>1$，则由$\|\varphi\|$的定义知，必有某个

$x_0\in A$，使 $\|x_0\|=1$ 且 $|\varphi(x_0)|>1$.

令 $x=\dfrac{x_0}{\varphi(x_0)}$， 则 $\|x\|=\dfrac{\|x_0\|}{|\varphi(x_0)|}<1$，且 $\varphi(x)=1$. 由于 $\|x^n\|\leqslant\|x\|^n$ 且 $\|x\|<1$，令

$$s_n=x+x^2+\cdots+x^n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

则 $\{s_n\}$ 为 A 的一个Cauchy序列. 又 A 是 Banach 空间，所以存在 $y\in A$，使得 $\|s_n-y\|\to 0$.

由于 $xs_n=s_{n+1}-x$，从而有 $xy=y-x$，于是有

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(y-x)=\varphi(y)-\varphi(x).$$

因为 $\varphi(x)=1$，得 $\varphi(y)=\varphi(y)-1$，这是不可能的，定理得证.

Banach代数 A 到复数域 C 的同态是Banach代数上最重要的复泛函. 由它的代数性质，保持乘法且为线性的，推出它必为有界的. 显示了代数性质和拓扑性质之间的关系.

§3.2 谱论

在有单元的Banach代数 A 中，我们要考虑 A 中的元素关于乘法的可逆性，元素 $x\in A$ 称为可逆的，如果存在一个元素 $y\in A$ 使得

$$xy=yx=e.$$

y 称为 x 的逆元，记作 x^{-1}. 每一个 $x\in A$ 至多只能有一个逆元. 因为若 y、z 都是 x 的逆元，则

$$xy=yx=e,\qquad xz=zx=e,$$

于是 $$z=ze=z(xy)=(zx)y=ey=y.$$

令 G 是 A 内可逆元的集合：

$$G=\{x\in A|\ x^{-1}\text{存在}\}$$

容易看出，若 $x\in G$，$y\in G$，则 $x^{-1}\in G$，$xy\in G$，这是因为 $(x^{-1})^{-1}=x$，$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. 所以 G 关于乘法构成一个群.

定义 2 对于元素 $x\in A$，使 $x-\lambda e$ 不可逆的全体复数 λ 组成的

集合，称为x的谱，记作$\sigma(x)$。即$\sigma(x)=\{\lambda\in C|\ x-\lambda e\notin G\}$。

定理2　若$x\in A$，$\|x\|<1$，则$e-x\in G$。且

$$(e-x)^{-1}=e+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n. \qquad (1)$$

证　记$s_n=e+x+x^2+\cdots+x^n$。因为$\|x\|<1$，$\|x^n\|\leqslant\|x\|^n$，得知$\{s_n\}$是A中的Canchy序列，故(1)式中级数收敛于一个元素$y\in A$。即$s_n\to y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$。又

$$(e-x)s_n=e-x^{n+1}=s_n(e-x)\to e,$$

$$(e-x)s_n\to(e-x)y,\quad s_n(e-x)\to y(e-x),$$

所以
$$(e-x)y=y(e-x)=e。$$

这个定理说明，以e为中心1为半径的开球内的所有元素都是可逆的。

定理3　若　$a\in G$，$\|x\|<\dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$，则$a-x\in G$。

证　由$a-x=a(e-a^{-1}x)$，$\|a^{-1}x\|\leqslant\|a^{-1}\|\,\|x\|<1$。由定理2知$e-a^{-1}x$可逆。而$a$可逆，所以$a(e-a^{-1}x)$可逆，即　$a-x\in G$。

定理说明，对于G中的任意点a，以a为中心，以$\dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$为半径的开球内的点也都在G中，由此得出以下结论。

推论1　G是开集，$A\setminus G$是闭集。

定理4　映射$x\to x^{-1}$是G到G上的同胚。

证　首先证明$x\to x^{-1}$是连续映射，　令$a\in G$，$\|x\|<\dfrac{1}{2\|a^{-1}\|}$。

$$\|(a-x)^{-1}-a^{-1}\|=\|(e-a^{-1}x)^{-1}a^{-1}-a^{-1}\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \| [a^{-1}x+(a^{-1}x)^2+\cdots)a^{-1} \| \\
&\leqslant [\, \|a^{-1}x\| + \|a^{-1}x\|^2+\cdots]\, \|a^{-1}\| \\
&\leqslant \|a^{-1}\|^2\|x\| + \|a^{-1}\|^3\|x\|^2+\cdots \\
&\quad + \|a^{-1}\|^n\|x\|^{n-1}+\cdots \\
&= \frac{\|a^{-1}\|^2\|x\|}{1-\|a^{-1}\|\,\|x\|} < 2\|a^{-1}\|^2\|x\|.
\end{aligned}
$$

$\left(\text{公比为}\|a^{-1}\|\,\|x\|<\dfrac{1}{2}\text{的几何级数}\right)$

当$\|x\|$充分小，则$2\|a^{-1}\|^2\|x\|$可以任意小，所以$x\to x^{-1}$是连续的.

又显然$x\to x^{-1}$是映上的，而且由于$(x^{-1})^{-1}=x$，故逆映射就是它自己，所以$x\to x^{-1}$是G到G上的同胚.

定理5 对于每个$x\in A$，谱$\sigma(x)$是紧集，且当$\lambda\in\sigma(x)$时$|\lambda|\leqslant\|x\|$.

证 若$|\lambda|>\|x\|$，则$\dfrac{\|x\|}{|\lambda|}<1$，所以$e-\dfrac{x}{\lambda}\in G$，即$\lambda e-x\in G$，因此$\lambda\notin\sigma(x)$，故若$\lambda\in\sigma(x)$则$|\lambda|\leqslant\|x\|$，也就是$\sigma(x)$为有界集.

再证明$\sigma(x)$是闭集，设$\lambda_n\in\sigma(x)$且$\lambda_n\to\lambda$，则$x-\lambda_n e\to x-\lambda e$. 因为$x-\lambda_n e\in A\setminus G$，而$A\setminus G$是闭集，所以$x-\lambda e\in A\setminus G$，即$\lambda\in\sigma(x)$. $\sigma(x)$是闭的.

综上所证，$\sigma(x)$是C中的有界闭集，故$\sigma(x)$为紧集.

定理6 设ϕ为Banach代数A上的有界线性泛函，固定$x\in A$，定义

$$f(\lambda)=\phi[(x-\lambda e)^{-1}],\quad \lambda\notin\sigma(x)$$

则$f(\lambda)$在$C\setminus\sigma(x)$上解析，且当$\lambda\to\infty$时，$f(\lambda)\to 0$.

证 取定$\lambda\in C\setminus\sigma(x)$，证明$\dfrac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}$当$\mu\to\lambda$时极限存在.

因$C\setminus\sigma(x)$为开集，故当μ充分接近λ时，$\mu\in C\setminus\sigma(x)$.

$$(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}=(x-\mu e)^{-1}[(x-\lambda e)-(x-\mu e)](x-\lambda e)^{-1},$$

$$\frac{(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{\mu-\lambda}=(x-\mu e)^{-1}(x-\lambda e)^{-1}\to(x-\lambda e)^{-2},$$

当 $\mu\to\lambda$.

由于ϕ是线性泛函且为连续的，所以当$\mu\to\lambda$时

$$\frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}=\phi\left[\frac{(x-\mu e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}}{\mu-\lambda}\right]\to\phi(x-\lambda e)^{-2}.$$

这说明f在λ点是可微的，从而$f(\lambda)$在$C\setminus\sigma(x)$内是解析的.

由定理 5 知$f(\lambda)$在以0点为中心$\|x\|$为半径的圆外是有意义的，故可以考虑$\lambda\to\infty$的情况. 由G中逆映射的连续性，当$\lambda\to\infty$有

$$\lambda f(\lambda)=\phi[\lambda(x-\lambda e)^{-1}]=\phi[(\lambda^{-1}x-e)^{-1}]\to\phi(-e)$$

所以当$\lambda\to\infty$时$f(\lambda)\to0$.

定理 7 对每个$x\in A$，$\sigma(x)$是C的非空紧子集.

证 定理 5 中已经证明了$\sigma(x)$是紧集，现只需证明$\sigma(x)$非空. 固定$x\in A$，若$\sigma(x)$为空集，则对一切$\phi\in A^*$，$f(\lambda)=\phi[(x-\lambda e)^{-1}]$在$C$上解析，即$f(\lambda)$为整函数，且由$\lambda\to\infty$时$f(\lambda)\to0$知$f(\lambda)$是有界的，根据Liouville定理知$f(\lambda)\equiv0$.

又取定$\lambda=0$，x可逆故$x^{-1}\neq0$，由Hahn-Banach定理知，存在$\phi_1\in A^*$，使得$\phi_1(x^{-1})=\|x^{-1}\|\neq0$，即$f(0)=\phi_1(x^{-1})\neq0$，矛盾，定理得证.

定理 8 (Gelfand-Mazur定理)若具有单位元素的Banach代数A中的每个非零元素都是可逆的，则A就是复数域，即若$G=A\setminus\{0\}$，则$A=Ce$，($Ce=\{\lambda e|\lambda\in C\}$).

证 由假设知，对于一切$x\in A$，只要$x-\lambda e\neq0$则$x-\lambda e$可逆，即$\lambda\notin\sigma(x)$，换言之，若$\lambda\in\sigma(x)$，则$x-\lambda e=0$，即$x=\lambda e$，所以$\sigma(x)$至多只能包含一个数. 因为若λ_1，$\lambda_2\in\sigma(x)$，则由$x=\lambda_1 e$及

$x=\lambda_2 e$知$\lambda_1=\lambda_2$. 又由定理7知$\sigma(x)$非空，故$\sigma(x)$刚好由一点组成，记为λ_x，则$x=\lambda_x e$，因此$x\to\lambda_x$是A到复数域上的同构，且$\|x\|=\|\lambda_x e\|=|\lambda_x|$，所以也是等距的，因此$A=Ce$.

定理说明，这个代数A是最简单的代数，且顺便得到了A是可交换的. 在后面考虑可交换的Banach代数时，可以看到这个定理的重要性.

定义 3 A是具有单位元素的Banach代数，$x\in A$，记

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(x)\},$$

$\rho(x)$称为x的谱半径.

定理 9 （谱半径公式）对于每个$x\in A$,

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证 （1）首先证明$\rho(x)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\inf\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

固定$x\in A$，若$\lambda\in\sigma(x)$，则必有$\lambda^n\in\sigma(x^n)$，因为若$\lambda^n\notin\sigma(x^n)$，则$(x^n-\lambda^n e)^{-1}$存在。但

$$\begin{aligned}x^n-\lambda^n e&=(x-\lambda e)(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-2}x+\lambda^{n-1}e)\\&=(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-2}x+\lambda^{n-1}e)(x-\lambda e),\end{aligned}$$

右乘$(x^n-\lambda^n e)^{-1}$，得

$$e=(x-\lambda e)(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-2}x+\lambda^{n-1}e)(x^n-\lambda^n e)^{-1}.$$

左乘$(x^n-\lambda^n e)^{-1}$，得

$$e=(x^n-\lambda^n e)^{-1}(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-2}x+\lambda^{n-1}e)(x-\lambda e).$$

由以上二式知$(x-\lambda e)^{-1}$是存在的，故$\lambda\notin\sigma(x)$. 所以若$\lambda\in\sigma(x)$则$\lambda^n\in\sigma(x^n)(n=1,2,\cdots)$.

又由定理5知$|\lambda^n|\leqslant\|x^n\|$，所以$|\lambda|\leqslant\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. 这就给出

$$\rho(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

（2）其次再证明$\rho(x)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sup\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

因为 $(x-\lambda e)^{-1}=-\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}$,

而当 $\|\lambda^{-1}x\|<1$，即 $|\lambda|>\|x\|$ 时，

$$(e-\lambda^{-1}x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n.$$

即
$$(x-\lambda e)^{-1}=-\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n,$$
$$|\lambda|>\|x\|.$$

于是
$$f(\lambda)=\Phi((x-\lambda e)^{-1})=-\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(x^n)\lambda^{-n-1},$$
$$\Phi\in A^*,\quad |\lambda|>\|x\|.$$

由定理 6 知 $f(\lambda)$ 在 $C\setminus\sigma(x)$ 内是解析的。特别地，$f(\lambda)$ 在域 $\{\lambda\mid|\lambda|>\rho(x)\}$ 内是解析的。于是得出级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(x^n)\lambda^{-n-1}=\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi(\lambda^{-n}x^n)$ 在域 $\{\lambda\mid|\lambda|>\rho(x)\}$ 内收敛。故对任意 $\Phi\in A^*$，有

$$\sup_n|\Phi(\lambda^{-n}x^n)|<\infty,\qquad |\lambda|>\rho(x). \tag{2}$$

由第二章推论 2 知，对于任意的 $x\in A$，映射 $\Phi\to\Phi(x)$ 是 A^* 上的有界线性泛函，其范数为

$$\|x\|=\sup\{|\Phi(x)|\mid\Phi\in A^*,\ \|\Phi\|=1\}.$$

所以 $\lambda^{-1}x$，$\lambda^{-2}x^2$，…，$\lambda^{-n}x^n$，…是定义在 A^* 上的一族有界线性泛函，且对每个 Φ，（2）式成立。由 Banach-Steinhaus 定理知，对每一个使 $|\lambda|>\rho(x)$ 的 λ，存在一个实数 $c(\lambda)$，使得

$$\|\lambda^{-n}x^n\|\leqslant c(\lambda),\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

即对一切 n 有

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant|\lambda|\,[c(\lambda)]^{\frac{1}{n}},\quad |\lambda|>\rho(x).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}|\lambda|\,[c(\lambda)]^{\frac{1}{n}}=|\lambda|,$$

对于一切满足 $|\lambda|>\rho(x)$ 的 λ 是成立的. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\leqslant\rho(x).$$

由(1)、(2)得

$$\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}=\rho(x).\qquad \text{定理得证.}$$

定理说明了以下几个事实:

(1) $\rho(x)$ 的定义仅用了元素 x 的代数性质, 即根据 $x-\lambda e$ 是否有逆元素来确定 $\rho(x)$. 但定理却给出了 $\rho(x)$ 和 x^n 的范数有关, 也就是 $\rho(x)$ 依赖于 A 的拓扑性质.

(2) $\rho(x)$ 与范数 $\|x\|$ 是如何定义的无关, 只要 A 按范数 $\|x\|$ 构成Banach代数, 则谱半径公式恒成立, 且 $\rho(x)$ 只和 $x^n(n=1, 2, \cdots)$ 有关, 而与整个 A 无关.

(3) 若Banach代数 A 是Banach代数 B 的闭子代数, 可能出现以下情况: 某个 $x\in A$, $x-\lambda e$ 在 A 中不可逆, 但在 B 中可逆, 令

$$\sigma_A(x)=\{\lambda\,|(x-\lambda e)^{-1}\text{在}A\text{中不存在}\},$$

$$\sigma_B(x)=\{\lambda\,|(x-\lambda e)^{-1}\text{在}B\text{中不存在}\},$$

则 $\sigma_A(x)\supset\sigma_B(x)$. 但定理 9 却说明 x 的谱半径不受影响, 即 $\rho_A(x)=\rho_B(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$; 谱半径仅仅用 x 的幂的度量性质给出.

例 设 $B=C(T)$ 是单位圆周 T 上的全体复连续函数. 按通常的加法和乘法, 取范数 $\|f\|_\infty=\sup\{|f(z)|\,|\,z\in T\}$, B 为一个Banach代数, 并且有单元 $e=1$.

令 A 是 $C(T)$ 中具有下列性质的 f 的集合: f 可以开拓为单位圆的闭包 $\overline{U}$ 上的连续函数 F, 且 F 在 U 内解析, 则按 B 中定义的加法, 乘法和范数, A 也构成一个Banach代数. 只需证 A 是闭的. 设 $\{f_n\}\in A$, 即每个 f_n 都可以开拓为 F_n, F_n 在 $\overline{U}$ 上连续在 U 内解析, 若 $\{f_n\}$ 为 A 内的Cauchy序列, 则 f_n 在 T 上一致收敛, 即

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon,\qquad n, m>N,$$

且 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

由解析函数的最大模原理知：$\| F_n - F_m \| < \varepsilon$，当 n，$m > N$。故 $\{F_n\}$ 也是Cauchy序列，且在 $\overline{U}$ 上一致收敛，令 $\lim_{n\to\infty} F_n = F$，$F$ 即为 f 在 $\overline{U}$ 上的开拓，所以 $f \in A$。这表明 A 是 B 的闭子代数。

考虑 $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ 定义的 f_0，则 $F_0(z) = z$。下面求 $\sigma_A(f_0)$。因为 $|\lambda| \leqslant \| f_0 \| = 1$，所以不必考虑 $|\lambda| > 1$ 的情形。

当 $|\lambda| \leqslant 1$，考虑 $f_0 - \lambda \cdot 1$ 在 A 中的逆元素 $(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1}$，若逆元素存在，则一定可以开拓为 $\overline{U}$ 上连续 U 内解析的函数，故必能在 U 上展成幂级数，但当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时，$(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1} = \lambda^{-1}(\frac{f_0}{\lambda} - 1)^{-1}$，而 $\frac{\| f_0 \|}{|\lambda|} \geqslant 1$，故不能展成幂级数。所以 $f_0 - \lambda \cdot 1$ 的逆元素不存在，因此 $\sigma_A(f_0) = \overline{U}$。

再求 $\sigma_B(f_0)$。当 $|\lambda| < 1$ 时 $f_0 - \lambda \cdot 1 = e^{i\theta} - \lambda \neq 0$，所以

$$(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1} = \frac{1}{f_0 - \lambda}.$$

但当 $|\lambda| = 1$ 时 $f_0(\lambda) = \lambda$，则 $\frac{1}{f_0 - \lambda}$ 不存在，所以 $\sigma_B(f_0) = T$.

由此看出 $\sigma_A(f_0)$ 比 $\sigma_B(f_0)$ 要大得多，但 $\rho_A(f_0) = \rho_B(f_0) = 1$.

§3.3 Banach代数上的理想与同态

本节研究可交换的Banach代数 A 上的极大理想与 A 上的复同态 φ 的关系，在第一章中，已经给出了环上理想与极大理想概念，所谓Banach代数 A 上的理想 I，是指 I 是 A 的子集，且满足

(1)若 x，$y \in I$，则 $x + y \in I$；

(2)若 $x \in I$，$z \in A$，则 $xz \in I$.

也就是将 A 看成一个环，则 I 是环上理想。

若 $I \neq A$，则称 I 为一个真理想，若 I 是一个真理想，且不含于其

它任何真理想，则称I为极大理想．即若N是A中的理想，且$I\subset N$，则必有$N=I$或$N=A$。

理想I实际上是个子空间，因为若$x\in I$，$y\in I$，则$x+y\in I$；若$x\in I$，$\alpha\in C$，则$\alpha x=\alpha(ex)=(\alpha e)x\in I$。

以下我们总以A表示具有单元的可交换的Banach代数。

容易看出A上的理想I具有以下几个性质：

(1)I是A上的理想，则$\overline{I}$也是A上的理想。

(2)若I是A上的真理想，则$I\cap G=\phi$。

因为若$I\cap G\neq\phi$，则存在$g\in I\cap G$，所以$g^{-1}\in A$存在，于是$e=gg^{-1}\in I$．因此$I=A$，与I是真理想矛盾。

由(1)、(2)知，若I是一个真理想，则$\overline{I}$也是真理想，因为若$I\cap G=\phi$，而G为开集，所以$\overline{I}\cap G=\phi$。

(3)若M是极大理想，则M是闭的。

因为由(1)知，$\overline{M}$也是理想．由(2)知$\overline{M}\cap G=\phi$，所以$\overline{M}\neq A$．又$M\subset\overline{M}\neq A$，由极大理想定义知$M=\overline{M}$，即$M$是闭的。

(4)若I是A的真理想，则存在极大理想M，使得$M\supset I$。

可利用Zorn引理加以证明，令

$\mathscr{M}=\{J\mid J$是A上的真理想，$J\supset I\}$

利用集合的包含关系将$\mathscr{M}$半序化，今取$\{J_\alpha\}\in\mathscr{M}$是一个链，则容易验证$J=\bigcup\limits_{\alpha}J_\alpha$是包含$I$的真理想且为$\{J_\alpha\}$的上界，由Zorn引理知$\mathscr{M}$中必有极大元素$M$，$M$即为包含$I$的极大理想。

若I是A上的一个闭的真理想，对于每一个$x\in A$，令$\dot{x}$或$\varphi(x)$表示集合$x+I$：

$$\varphi(x)=\dot{x}=x+I=\{x+y\mid y\in I\},$$

称为I的傍集，显然由定义知，若$x_2-x_1\in I$，则$\dot{x}_2=\dot{x}_1$，若$x_2-x_1\notin I$，则$\dot{x}_2\cap\dot{x}_1=\phi$，令$A/I$表示$I$的所有傍集构成的集合，在$A/I$中定义加法、数乘、乘法及范数如下：

$$\dot{x}_1+\dot{x}_2=\widehat{x_1+x_2}^{\,\cdot},\quad 或\quad (x_1+I)+(x_2+I)=x_1+x_2+I,$$

$$\alpha \dot{x} = \widehat{\alpha x}^{\bullet}, \quad 或 \quad \alpha(x+I)=\alpha x+I,$$

$$\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 = \widehat{x_1 x_2}^{\bullet}, \quad 或 \quad (x_1+I)(x_2+I)=x_1x_2+I.$$

$$\| \dot{x} \| = \| x+I \| = \inf\{ \| x+y \| \mid y\in I\}.$$

则A/I是一个具有单元的可交换的Banach代数。

首先，上面给出的加法、数乘及乘法运算是完全确定的。事实上，若 $z_1-x_1\in I$，$z_2-x_2\in I$，则 $z_1-x_1+z_2-x_2\in I$。即$(z_1+z_2)-(x_1+x_2)\in I$. 也就是说,若$\dot{z}_1 = \dot{x}_1$，$\dot{z}_2 = \dot{x}_2$，则

$\widehat{x_1+x_2}^{\bullet}=\widehat{z_1+z_2}^{\bullet}$。又由$z_1=x_1+y_1$，$y_1\in I$ 及 $z_2=x_2+y_2$，$y_2\in I$，知

$$z_1z_2=x_1x_2+(y_1x_2+x_1y_2+y_1y_2),$$

又 $y_1x_2+x_1y_2+y_1y_2\in I$。 故 $\widehat{z_1z_2}^{\bullet}=\widehat{x_1x_2}^{\bullet}$。

再证明$\| \dot{x} \|$满足范数的条件，由定义A/I中的零元素为$\dot{O}=O+I=I$.A/I中的单元为$\dot{e}=e+I$.

(1) $\| \dot{x} \| \geqslant 0$，显然成立.

若$\| \dot{x} \|=0$.由$\| \dot{x} \|$的定义知,存在$y_n\in I$,使得$\| x+y_n \| \to 0$.因为$x+y_n\in A$，所以$x+y_n\to O$，即$-y_n\to x$，又I是闭的，故$x\in I$，即$\dot{x}=\dot{O}$.

(2) $\| \alpha \dot{x} \| = |\alpha| \| \dot{x} \|$，显然成立。

(3)证明 $\| \dot{x}_1+\dot{x}_2 \| \leqslant \| \dot{x}_1 \| + \| \dot{x}_2 \|$.

由$\| \dot{x}_i \|$定义知，任给$\varepsilon>0$，存在$y_i\in I$，使得$\| x_i+y_i \| < \| \dot{x}_i \| +\varepsilon$，$i=1, 2$，. 又

$$\| \dot{x}_1+\dot{x}_2 \| \leqslant \| x_1+x_2+y_1+y_2 \| \leqslant \| x_1+y_1 \| + \| x_2$$

$+y_2\| \leqslant \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\| + 2\varepsilon,$

所以 $\|\dot{x}_1+\dot{x}_2\| \leqslant \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\|$.

(4) 再证 $\|\dot{x}_1\dot{x}_2\| \leqslant \|\dot{x}_1\|\,\|\dot{x}_2\|$.

与(3)同, $\|\dot{x}_1\dot{x}_2\| \leqslant \|(x_1+y_1)(x_2+y_2)\| \leqslant \|x_1$

$+y_1\|\,\|x_2+y_2\| < (\|\dot{x}_1\|+\varepsilon)(\|\dot{x}_2\|+\varepsilon)$

$= \|\dot{x}_1\|\,\|\dot{x}_2\| + \varepsilon',$

所以 $\|\dot{x}_1\dot{x}_2\| \leqslant \|\dot{x}_1\|\,\|\dot{x}_2\|$.

最后证明A/I的完备性.

令$\{\dot{x}_n\}$是A/I中的Cauchy序列，则存在着子序列$\{\dot{x}_{n_i}\}$，使得

$$\|\dot{x}_{n_{i+1}} - \dot{x}_{n_i}\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \cdots.$$

对于一切i，由$\|\dot{x}_{n_{i+1}} - \dot{x}_{n_i}\|$的定义知，存在$y_i\in I$使得

$$\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i} + y_i\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \cdots.$$

令 $z_i = x_{n_i} + y_{i-1} + y_{i-2} + \cdots + y_1$，则

$$\|z_{i+1} - z_i\| = \|x_{n_{i+1}} - x_{n_i} + y_i\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \cdots,$$

所以$\{z_i\}$为A中的Cauchy序列，又A是完备的，故$\{z_i\}$收敛. 令$z_i \to z$，又因为$\|\dot{z}_i - \dot{z}\| \leqslant \|z_i - z\|$(取$y=0\in I$)，所以$\dot{z}_i \to \dot{z}$.
又$z_i - x_{n_i} = y_{i-1} + y_{i-2} + \cdots + y_1 \in I$，故$\dot{z}_i = \dot{x}_{n_i}$，由此可知$\{\dot{x}_n\}$有收敛子列$\{\dot{x}_{n_i}\}$，且收敛于$\dot{z}$，于是得到$\{\dot{x}_n\} \to \dot{z}$，即$A/I$是完备的.

由以上论证知，A/I确为一有单元$\dot{e}$的可交换Banach代数，

也称为商代数。

定理10 A/I是一个域的充分必要条件是I是A上的极大理想。

证 假设$x\in A$，$x\notin I$，则$\dot{x}\neq 0$且$\dot{x}\in A/I$，作

$$J=\{\dot{x}\dot{z}\mid \dot{z}\in A/I\}=\{xz+y\mid z\in A,\ y\in I\},$$

容易验证J是A的一个理想，且$J\supset I$，因为$x\in J$而$x\notin I$，故$J\neq I$。

若I是极大理想，则$J=A$。因此对某个$z\in A$和$y\in I$有$xz+y=e$。即$xz-e=y\in I$。所以$\dot{x}\dot{z}=\dot{e}$。这就是说，若$\dot{x}\neq 0$则$\dot{x}$可逆。由Gelfand-Mazur 定理知A/I为一个域。

若I不是极大理想，则与以上一样选择x使$J\neq A$，即$e\notin J$，从而$\dot{x}$在A/I中不可逆，定理得证。

下面研究A上的极大理想与A到C上的代数同态之间的关系。

令$\mathscr{M}(A)=\mathscr{M}$ 表示A的一切极大理想的集合。

令$\Delta(A)=\Delta$是A到C上的一切非零代数同态的集合。

取$M\in\mathscr{M}$，由定理10知A/M是一个域，且由Gelfand-Mazur定理知$A/M=C\dot{e}$，这也就是说，当M取定，任给$x\in A$，则对应一个复数记作$\varphi_M(x)$，使

$$\dot{x}=x+M=\varphi_M(x)\dot{e},\ \varphi_M(x)\in C,$$

或
$$x-\varphi_M(x)e\in M。$$

由A/M的定义知，$A\to A/M$即$x\to\dot{x}$ 保持所有的代数运算，即为一代数同态。又$A/M\to C$，即$\dot{x}\to\varphi_M(x)$ 为一代数同态；由此可得$x\to\varphi_M(x)$是A到C上的代数同态，即属于Δ。也就是说，任给$M\in\mathscr{M}$，都可以找到一个Δ中的元素$\varphi_M:x\to\varphi_M(x)$与之相对应。使$\varphi_M(x)=0$的一切$x$的集合称为$\varphi_M$的核，记作$\ker\varphi_M$，显然

$$\ker\varphi_M=\{x\mid\varphi_M(x)=0\}=M。$$

定理11 若ψ是$A\to C$的代数同态，且$\ker\psi=M$，则M必是A的极大理想。

证 设x，$y\in M$，即$\psi(x)=0$．$\psi(y)=0$，则$\psi(x+y)=$

$\psi(x)+\psi(y)=0$. 所以$x+y\in M$.

若$x\in M$, $z\in A$, 则$\psi(xz)=\psi(x)\cdot\psi(z)=0$. 所以$xz\in M$.

故M是一个理想. 任给一个理想$N\supset M$且$N\neq M$, 即有$y\in N$, $y\notin M$, $\psi(y)\neq 0$. 不妨设$\psi(y)=1$, 又$\psi(e)=1$, 所以$\psi(e-y)=0$即$e-y\in M$,故存在$m\in M$,使$e-y=m$. 又$y\in N$, $m\in M\subset N$, 从而$e=y+m\in N$, 于是$N=A$. 所以M是极大理想. 定理得证.

又由于 $\psi(x-\psi(x)e)=\psi(x)-\psi(e)\psi(x)=\psi(x)-\psi(x)=0$, 得 $x-\psi(x)e\in M$.

这个定理说明, 任给$\psi\in\Delta$, 则得到$\ker\psi=M\in\mathscr{M}$. 而且对一切$x\in A$, 有$x-\psi(x)e\in M$. 所以ψ即为φ_M.

综上所述, 给定$M\in\mathscr{M}$, 可以有$\varphi_M\in\Delta$与之相对应, 使$\ker\varphi_M=M$, $x-\varphi_M(x)e\in M$. 反之, 给定一个$\psi\in\Delta$, 则$\ker\psi=M\in\mathscr{M}$. 且$x-\psi(x)e\in M$. 这样就确定了极大理想集合$\mathscr{M}$和代数同态集合Δ上的一一对应. 又由于极大理想一定存在,故一定有$A\to\mathbf{C}$的代数同态. 若在代数同态集合上再定义拓扑, 则可构成一个拓扑空间. 下面在讨论Gelfand表示理论时, 将在Δ(或$\mathscr{M}$)上引入拓扑.

§3.4 弱拓扑与弱*拓扑

设X_α是拓扑空间, 其中α是某个指标集合K中的元素. 考虑笛卡尔乘积

$$X=\prod_{\alpha\in K}X_\alpha,$$

这是指$x\in X$可看成广义序列

$$x=(x_\alpha\,|\alpha\in K),\ \text{其中}x_\alpha\in X_\alpha.$$

X上的乘积拓扑是指有一个由以下形式的集合组成的基:

$$\bigcap_{\alpha\in B}P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

其中U_α是X_α中的开集, $B\subset K$且B为有限集. P_α是X到X_α的投影.

即P_a：$X\to X_a$，$x\to x_a$，其中$x=(x_a)$．X中的开集定义为基中任意多个集的并集。按以上定义的拓扑x^ν趋近于x，即$x^\nu\to x$是指每一个坐标都有$x_a^\nu\to x_a$，$a\in K$。

在点集拓扑中有以下著名定理。

定理12 (Tychonoff定理)一族紧拓扑空间$X_a(a\in K)$的笛卡尔乘积$\prod_{a\in K}X_a$也是紧的。(证明从略)

Banach 空间的范数拓扑通常称为强拓扑，Cauchy 叙列$\{x_n\}$称为是强收敛的，其极限也称为强极限。下面介绍弱拓扑和弱*拓扑的概念。

设A是赋范线性空间，A^*是A的共轭空间，A^{**}是A^*的共轭空间。由第二章推论知，对于固定的$x\in A$，映射$\varphi\to\varphi(x)$，$(\varphi\in A^*)$是A^*上一个范数为$\|x\|$的有界线性泛函。即当$x\in A$，令

$$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x),$$

其中$\varphi\in A^*$，则$\hat{x}\in A^{**}$且$\|\hat{x}\|=\|x\|$．由此知$A\subset A^{**}$。

任给$x\in A$，考虑$\{\varphi(x)\,|\varphi\in A^*\}$，由Hahn-Banach定理知，当$x\neq y$则$\{\varphi(x)\}\neq\{\varphi(y)\}$。即对于不同的$x$，广义序列$\{\varphi(x)\}$不同。这样可以将$x$和它在$\varphi$上的广义坐标$\varphi(x)=x_\varphi$相对应，即$x$完全被广义序列$\{x_\varphi\}$所决定。也就是说若$x\in A$，则

$$x\in\prod_{\varphi\in A^*}X_\varphi,\qquad (X_\varphi=C).$$

于是A中每一点x都可以看作乘积空间$\prod_{\varphi\in A^*}X_\varphi$中的点。反之，若$t\in\prod_{\varphi\in A^*}X_\varphi$，只有当$t$满足

$$t_{\phi+\psi}=t_\phi+t_\psi,\ t_{a\varphi}=at_\varphi$$

时，可以有$t\in A$。所以A是乘积空间$\prod_{\varphi\in A^*}X_\varphi$的子集，将乘积空间

$\prod_{\varphi\in A^*} X_\varphi$的拓扑作为$A$的拓扑，则$A$成为$\prod_{\varphi\in A^*} X_\varphi$的子空间．这种拓扑称为$A$的弱拓扑。

A的弱拓扑是指包含着如下形式的集合构成的基的拓扑

$U(x_0;\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \varepsilon)=\{x\in A\mid|\varphi_i(x)-\varphi_i(x_0)|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots n\}$，其中 $x_0\in A,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n\in A^*,\ n\in N,\ \varepsilon>0$．

由以上引入的拓扑看出，A的弱拓扑是指使一切$\varphi\in A^*$都连续的拓扑．在A原来的度量拓扑下，所有$\varphi\in A^*$都是连续的．故以上引入的拓扑较A的度量拓扑要弱，故称为弱拓扑．

下面考虑A的共轭空间A^*上的拓扑．由以上所述知，A^*的弱拓扑是使A^{**}中的元素都连续的拓扑。又$A\subset A^{**}$，又可以由此引入一种有用的拓扑，称之为A^*的弱*拓扑，它是使A中的元素都连续的最弱的拓扑．即A^*的弱*拓扑是由以下形式的集合构成的基的拓扑：

$U(\varphi_0;\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_n,\ \varepsilon)=\{\varphi\in A^*\mid|\hat{x}_i(\varphi)-\hat{x}_i(\varphi_0)|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$

或 $U(\varphi_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \varepsilon)=\{\varphi\in A^*\mid|\varphi(x_i)-\varphi_0(x_i)|<\varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$．

其中 $\varphi_0\in A^*,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\in A,\ \hat{x}_i(\varphi)=\varphi(x_i),\ \varepsilon>0$．

A^*的弱拓扑被A^{**}所决定，而A^*的弱*拓扑由A决定，又A可以嵌入A^{**}，所以弱*拓扑比弱拓扑要弱。

定理13 （Alaoglu定理）．设A是赋范线性空间，令

$$S^*=\{\varphi\in A^*\mid\|\varphi\|\leqslant 1\}.$$

则S^*是弱*紧的，即在A^*的弱*拓扑下，S^*是紧的。

证 对于每个$x\in A$，令$A_x=\{\alpha\in C\mid|\alpha|\leqslant\|x\|\}$．因为$A_x$是$C$的有界闭集，所以$A_x$是紧集．

若$\varphi\in S^*$，φ可以看成广义序列$\{\varphi(x)\}$，且由$\|\varphi\|\leqslant 1$知

$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \|x\| \leqslant \|x\|$。所以$\varphi(x) \in A_x$。故

$$S^* \subset \prod_{x \in A} A_x.$$

由Tychonoff定理知 $\prod_{x \in A} A_x$也是紧空间，而S^*是这个紧空间的子集，要证明S^*是紧的，只需证明S^*是闭的，即证明在A^*的弱*拓扑下，S^*的极限点含于S^*内。

任取$t=(t_x)$是S^*的一个极限点，要证明$t \in S^*$，只需证明

$$t_{x+y}=t_x+t_y, \qquad (\forall\, x,\ y \in A),$$
$$t_{ax}=at_x \qquad (a \in \mathbf{C},\ x \in A),$$
$$\|t\| \leqslant 1.$$

设x，$y \in A$，任取$\varepsilon>0$。按A^*的弱*拓扑定义，知

$$U(t;\ x,\ y,\ x+y,\ \varepsilon)=\Big\{ s \in \prod_{x \in A} A_x \,\Big|\, |s_x-t_x|<\varepsilon,$$
$$|s_y-t_y|<\varepsilon,\quad |s_{x+y}-t_{x+y}|<\varepsilon\Big\}$$

是 t 的一个邻域。因为 t 是S^*的极限点，故该邻域中包含S^*的点，即存在$\varphi \in S^*$使得$\varphi \in U(t;\ x, y,\ x+y, \varepsilon)$。所以

$$|(t_{x+y}-t_x-t_y)-(\varphi_{x+y}-\varphi_x-\varphi_y)| \leqslant |t_{x+y}-\varphi_{x+y}|+|t_x-\varphi_x|$$
$$+|t_y-\varphi_y|<3\varepsilon.$$

但$\varphi \in S^*$是线性的，即 $\varphi_{x+y}-\varphi_x-\varphi_y=0$，所以有

$$|t_{x+y}-t_x-t_y|<3\varepsilon.$$

由ε的任意性，得

$$t_{x+y}=t_x+t_y.$$

类似地可证 $\qquad t_{ax}=at_x$。

又由 $|t_x-\varphi_x|<\varepsilon$，得 $|t_x|<|\varphi_x|+\varepsilon \leqslant \|x\|+\varepsilon$。再由$\varepsilon$的任意性，得 $|t_x| \leqslant \|x\|$，即 $\|t\| \leqslant 1$。所以S^*是弱*闭的。证毕。

§3.5 Gelfand表示理论

由§3.3的讨论知，若A是具有单元的可交换的Banach代数. $\mathscr{M}$是A的极大理想的集合. $\Delta(A)$是$A\to C$的所有非零代数同态的集合，则$\mathscr{M}$和$\Delta(A)$是一一对应的. 因此下面考虑的$\Delta(A)\to C$上的变换，也可以看成是$\mathscr{M}\to C$上的变换. 对于任意的$x\in A$，定义$\mathscr{M}\to C$的变换$\hat{x}$为：

$$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x), \qquad \forall\varphi\in\Delta(A).$$

$\hat{x}$就叫做x的Gelfand变换.

由定义容易得出$\hat{x}$的以下性质：

(1) $(x+y)\hat{}=\hat{x}+\hat{y}, \quad x, y\in A.$

因为 $(x+y)\hat{}(\varphi)=\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)=\hat{x}(\varphi)+\hat{y}(\varphi).$

$$\varphi\in\Delta(A).$$

(2) $(xy)\hat{}=\hat{x}\hat{y}.$ (与(1)的证明类似)

(3) $(\alpha x)\hat{}=\alpha\hat{x}.$

故 $x\to\hat{x}$ 即 $A\longrightarrow\hat{A}=\{\hat{x}\mid x\in A\}$ 保持以上代数运算，故为一代数同态。

现定义范数

$$\|\hat{x}\|_\infty=\sup_{\varphi\in\mathscr{M}}|\hat{x}(\varphi)|=\sup_{\varphi\in\mathscr{M}}|\varphi(x)|$$

又由于$\varphi\in\Delta(A)$，由定理1知$\|\varphi\|\leqslant 1$，故

$$\|\hat{x}\|_\infty\leqslant\|x\|.$$

即得以下结论.

定理14 Gelfand变换是由A到$\hat{A}$的模减小的代数同态.

下面在集合$\mathscr{M}(A)$上，也就是$\Delta(A)$上，引入拓扑，它是使所有的Gelfand变换$\hat{x}\,(x\in A)$都连续的最弱的拓扑，称为Gelfand拓

扑.

任给$\varphi_0\in\mathscr{M}(A)$, Gelfand 变换$\hat{x}(\varphi)$在$\varphi_0$是连续的，是指当$\varphi$靠近$\varphi_0$时(在$\mathscr{M}$中)，$\hat{x}(\varphi)$和$\hat{x}(\varphi_0)$很接近(在$\boldsymbol{C}$中)。根据连续映射的定义知，要使$\hat{x}(\varphi)$是连续的，必须使开集合的逆映射仍是开集合。即任给$\varepsilon>0$，集合

$$\{\varphi\in\mathscr{M}(A)\mid|\hat{x}(\varphi)-\hat{x}(\varphi_0)|<\varepsilon\}$$

必须是开的。将该集合记作$U(\varphi_0, x, \varepsilon)$；即

$$U(\varphi_0;x,\varepsilon)=\{\varphi\in\mathscr{M}\mid|\hat{x}(\varphi)-\hat{x}(\varphi_0)|<\varepsilon\}$$

必须是开的.

设 $\varphi_0\in\mathscr{M}$, $x_1, x_2, \cdots, x_n\in A$, 记

$$U(\varphi_0; x_1, x_2, \cdots, x_n\, \varepsilon)=\{\varphi\in\mathscr{M}\mid|\hat{x}_i(\varphi)-\hat{x}_i(\varphi_0)|<\varepsilon,\quad i=1, 2, \cdots, n\},$$

则 $$U(\varphi_0; x_1, x_2, \cdots, x_n, \varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{n}U(\varphi_0; x_i, \varepsilon).$$

显然，任意两个$U(\varphi_0; x_1, x_2, \cdots, x_n, \varepsilon)$的交集仍是这样的集合。考虑可以表示成任意多个$U(\varphi_0; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon)$这种集合的并的集合全体即构成一个拓扑。这个拓扑以$U(\varphi_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \varepsilon)$为基。在这个拓扑下所有Gelfand 变换$\hat{x}$都是连续的，由此知Gelfand拓扑具有一组基，它包含了所有形如$U(\varphi_0; x_1, x_2, \cdots, x_n, \varepsilon)$的集合.

引入Gelfand拓扑后，$\hat{x}$是$\mathscr{M}$上的连续泛函，即$\hat{x}\in C(\mathscr{M})$，或$\hat{A}=\{\hat{x}\mid x\in A\}$是$C(\mathscr{M})$的一个子空间。事实上$\hat{A}$也是一个子代数，且$\hat{A}$可以分离点，即若$\varphi$, $\psi\in\mathscr{M}$且 $\varphi\neq\psi$，则存在$x\in A$，使得

$$\hat{x}(\varphi)\neq\hat{x}(\psi),$$

或 $$\varphi(x)\neq\psi(x).$$

因为$\Delta(A)$与$\mathscr{M}$是一一对应的，故由$\varphi\neq\psi$知φ和ψ所对应的极大

理想也是不同的，也就是说φ和ψ的核是不同的，因此可取$x\in\ker\varphi$而$x\notin\ker\psi$. 所以存在x使

$$\varphi(x)=0,\ \psi(x)\neq 0.$$

故$\varphi(x)\neq\psi(x)$或$\hat{x}(\varphi)\neq\hat{x}(\psi)$. 由此知我们可以用Gelfand变换$\hat{x}$区分极大理想，或区分$A\to C$的代数同态.

定理15 在Gelfand拓扑下，$\mathscr{M}$是紧的Hausdorff空间.

证 任给$\psi\in\mathscr{M}(\Delta(A))$，作用在每一个$x\in A$上得广义序列$(\psi(x))$. 故$\psi$可以看作乘积空间$\prod_{X} C_x$的点. 又$\psi$是代数同态，由定理1知$\|\psi\|\leqslant 1$. 故$\mathscr{M}$可以看成单位球$S^*=\{\varphi\in\mathscr{M}\mid\|\varphi\|\leqslant 1\}$的一个子集. 又Gelfand拓扑正是$S^*$上的弱*拓扑，故由Alaoglu定理$S^*$是紧的. 若能证明$\mathscr{M}$是闭的，则$\mathscr{M}$必为紧集合. 又

$$\mathscr{M}=\Big\{t\in\prod_x C_x\mid t_{x+y}=t_x+t_y,\ t_{\lambda x}=\lambda t_x,\ t_{xy}=t_xt_y,\ t_e=1\quad\|t\|\leqslant 1\Big\},$$

与证明Alaoglu定理同，可证满足$t_{x+y}=t_x+t_y$的集合一定是闭的。同样，满足$t_{\lambda x}=\lambda t_x$，$t_{xy}=t_xt_y$，$t_e=1$，$\|t\|\leqslant 1$的集合也是闭的. 故$\mathscr{M}$是五个闭集的交集，所以$\mathscr{M}$是闭的；即$\mathscr{M}$是紧的.

又由于$\hat{A}$可区分$\mathscr{M}$的点，即$\varphi\neq\psi$，则$\hat{x}(\varphi)\neq\hat{x}(\psi)$，且$\hat{x}$是连续的. 故当$\varphi\neq\psi$，可以找到两个不同的邻域(Gelfand拓扑下)盖住$\hat{x}(\varphi)$和$\hat{x}(\psi)$. 因此$\mathscr{M}$是紧Hausdorff空间. 定理得证.

由以上讨论知，Gelfand变换$x\to\hat{x}$是由于A到$\hat{A}\subset C(\mathscr{M})$上的代数同态，且

$(x+y)\hat{}=\hat{x}+\hat{y}$，$(xy)\hat{}=\hat{x}\hat{y}$，$(ax)\hat{}=a\hat{x}$，$\hat{e}=1$，$\hat{o}=0$. 同时有$\|\hat{x}\|_\infty\leqslant\|x\|$. $\hat{A}$包含常数而且可以分离点.

A是可交换的Banach代数，A究竟是什么呢，这很抽象. 引入Gelfand变换后，得出$A\to C(\mathscr{M})$. $C(\mathscr{M})$是很具体的，是紧空间上的连续函数. 这样我们就将抽象的内容具体化了.

应该指出：$A\to C(\mathscr{M})$的对应不一定是一一的，因为$x\neq y$可

能有$\hat{x}=\hat{y}$；也就是$x\neq 0$时可能有$\hat{x}=0$。为此我们考虑Gelfand变换的核$\{x\,|\,\hat{x}=0\}$。可以证明

$$\{x\,|\,\hat{x}=0\}=\bigcap_{M\in\mathscr{M}}M.$$

事实上，若$\hat{x}=0$，则对一切φ，$\hat{x}(\varphi)=0$。即对一切φ有$\varphi(x)=0$。故$x\in\ker\varphi=M$，$\forall\varphi$。所以$x\in\bigcap\limits_{M\in\mathscr{M}}M$。

反之，若$x\in\bigcap\limits_{M\in\mathscr{M}}M$，则$x$属于$\mathscr{M}$中的每一个$M$。也就是说$x\in\ker\varphi,\forall\varphi$。即对一切$\varphi$有$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x)=0$。所以$\hat{x}=0$。

以上说明Gelfand变换的核是所有极大理想的交集，仍为一个理想，称为A的根。Gelfand变换是一一对应的充要条件是A的根等于$\{0\}$，即Gelfand变换是$A\to C(\mathscr{M})$内的一个同构映射的充要条件是$\bigcap\limits_{M\in\mathscr{M}}M=\{0\}$。

当$\bigcap\limits_{M\in\mathscr{M}}M=\{0\}$时，称$A$为半单纯的。

例 设X是紧Hausdorff空间，$C(X)$是X上所有连续函数构成的空间，则$C(X)$是一个具有单元的可交换的Banach代数。

(1)$C(X)$上的极大理想集合$\mathscr{M}$是什么？

令 $$M_a=\{f\in C(X)\,|\,f(a)=0\}$$

现在证明$M_a\in\mathscr{M}$。显然M_a是理想。因为

$$f\in M_a,\ g\in M_a\ \Longrightarrow f+g\in M_a,$$
$$f\in M_a,\ h\in C(X)\Longrightarrow hf\in M_a,$$
$$f\in M_a,\ \alpha\in \mathbf{C}\ \Longrightarrow \alpha f\in M_a,$$

又$1(x)=1\notin M_a$，故$M_a\neq C(X)$，M_a是一个真理想。

再证M_a是极大理想，只需证明，若M是一个理想$M\supsetneqq M_a$，则$M=C(X)$。

因为$M\supsetneqq M_a$，则存在$g\in M\setminus M_a$，所以$g(a)\neq 0$．又$g(x)\in C(X)$，故存在a的邻域U_a当$x\in U_a$，时$g(x)\neq 0$．另外对一切$x\in X$，$x\neq a$，取$f_x\in M_a$，使得$f_x(x)\neq 0$，由$f\in C(X)$知，存在x的邻域U_x，使得当$x\in U_x$时$f_x\neq 0$。这样一来，对$x\in X$而$x\neq a$有邻域U_x，对a点有邻域U_a，U_x和U_a构成了X的一个开覆盖，，即$\{U_x|x\in X, x\neq a\}\cup\{U_a\}$是$X$的一个开覆盖，又$X$是紧空间，故一定存在$X$的有限开覆盖$U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}$，$U_a$，且存在$f_{x_i}\in M_a$，在$U_{x_i}$上$f_{x_i}\neq 0$，同时有$g\in M$，且$g(a)\neq 0$。所以在$x$上有

$$|f_{x_1}|^2+|f_{x_2}|^2+\cdots+|f_{x_n}|^2+|g|^2>0.$$

又　$f_{x_i}\cdot\overline{f_{x_i}}\in M_a$，　$g\cdot\overline{g}\in M$，M是理想，所以

$$f=|f_{x_1}|^2+|f_{x_2}|^2+\cdots+|f_{x_n}|^2+|g|^2\quad\in M,$$

在X上处处不为零；故f有逆元素，也就是说，M包含可逆元素．所以$M=C(X)$．这就证明了$M_a\in\mathscr{M}$．

再证明$\mathscr{M}=\{M_a|a\in X\}$．为此只需证明任取$M\in\mathscr{M}$，必存在$a\in X$，使$M=M_a$。取$M\in\mathscr{M}$，考虑集合$\bigcap\{f^{-1}(0)|f\in M\}$，其中$f^{-1}(0)=\{x\in X|f(x)=0\}$。显然$\bigcap\{f^{-1}(0)|f\in M\}$是非空的，因为否则对一切$x\in X$都有$f\in M$使$f(x)\neq 0$。与以上证明$M_a\in\mathscr{M}$的方法完全相同，可以证明$M$中含可逆元素，故$M=C(X)$．所以$\bigcap\{f^{-1}(0)|f\in M\}$是非空的．再证明这个集合只含一个点，即存在某个$a\in X$，使

$$\bigcap\{f^{-1}(0)|f\in M\}=\{a\}.$$

用反证法。若$\bigcap\{f^{-1}(0)|f\in M\}\supset\{a, b\}$，$a$，$b\in X$。则$M$中的函数$f(x)$必满足$f(a)=f(b)=0$．又$C(X)$中至少存在一个$g(x)$使$g(a)=0$而$g(b)\neq 0$。将这样的$g(x)$的全体和$M$一起构成一个新的集合$M_1$：

$$M_1=\{f\in C(X)|f(a)=0\}.$$

前面已经证明了$M_1\in\mathscr{M}$．又$M_1\supsetneqq M$，同时$M_1\neq C(X)$。这与M是

极大理想是矛盾的.

由以上结论知，M中的函数必满足$f(a)=0$，所以$M=M_a$. 故

$$\mathscr{M}=\{M_a|a\in X\}.$$

这个事实说明任给一个$a\in X$都对应着$\mathscr{M}$中的一个极大理想，反之，任给一个极大理想，都有X中的一个元素与之对应，即$a\longleftrightarrow M_a$；这就构成了X与$\mathscr{M}$之间的一一对应$X\longleftrightarrow\mathscr{M}$.

(2)再研究$\Delta(C(X))$

已经知道，任给$\varphi\in\Delta(C(X))$，存在$a\in X$使$\ker\varphi=M_a$. 任给$f\in C(X)$，现在研究$\varphi(f)=?$.

因为$f-\varphi(f)\cdot 1\in\ker\varphi$，所以$f(a)-(\varphi(f)\cdot 1)(a)=0$. 即$f(a)=\varphi(f)$.

归纳以上结论知，对于每一个$\varphi\in\Delta(C(X))$，存在一个$a\in X$，使$\ker\varphi=M_a$. 且$\varphi(f)=f(a)$对一切$f\in C(X)$成立. 这样又构成了Δ与X之间的一一对应：$\Delta\longleftrightarrow X$. 所以得

$$\mathscr{M}\longleftrightarrow X\longleftrightarrow\Delta.$$

(3)考虑Gelfand变换：$\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$. 又由于对每个$\varphi\in\Delta$存在$a\in X$使得$\varphi(f)=f(a)$，故存在$a\in X$，使

$$\hat{f}(\varphi)=f(a).$$

又$\hat{f}:\mathscr{M}\to\boldsymbol{C}$，与$f:X\to\boldsymbol{C}$相对应，$\mathscr{M}$与$X$一一对应，在Gelfand拓扑下，$\hat{f}(\varphi)$是连续的，所以$f(a)$也是连续的. 因此Gelfand拓扑较$X$上的原来拓扑要弱.

由于X与$\mathscr{M}$一一对应，现在考虑映射$X\to X(=\mathscr{M})$. 即映射$x\to M_x$. X上是原来的拓扑，$X(=\mathscr{M})$上是Gelfand拓扑. 因为Gelfand拓扑较X上原来拓扑要弱，故Gelfand拓扑下的开集合一定是原来拓扑下的开集，也就是$X(=\mathscr{M})$中的开集合的逆映象必是X中的开集合. 所以$X\to X(=\mathscr{M})$是连续映射.

反之，可以证明映射$X(=\mathscr{M})\to X$也是连续的. 现在证明这一事实. 任取闭集合$K\subset X$，则$X\setminus K$是X中的开集合. 若能证明K在Gelfand拓扑下也是闭的，则其余集在Gelfand拓扑下必是开的.

这样$X(=\mathscr{M})\to X$必为连续映射.

因X是紧空间，$K\subset X$是闭集，故K也是紧的，又已证$X\to X(=\mathscr{M})$是连续的，且连续映射将紧集合映射成紧集合，故K在Gelfand拓扑下也是紧的．又$X(=\mathscr{M})$是紧Hausdorff空间，今证K是闭的．只需证明，若$x\notin K$则$x\notin\overline{K}$.

任取$k\in K$而$k\neq x(x\in X)$．由于X是Hausdorff空间，存在$U_k\ni k$，$V_x\ni x$，且$U_k\cap V_x=\phi$．即$\overline{U_k}\not\ni x$．作$\{U_k|k\in K\}$，就是K的一个开覆盖，且$x\notin\overline{U}_k$．又K是紧的，故有

$$U_{k_1}\cup U_{k_2}\cup\cdots\cup U_{k_n}\supset K.$$

而每一个$\overline{U}_{k_i}(i=1,\ \cdots,n)$都不包含$x$．所以

$$\overline{(U_{k_1}\cup U_{k_2}\cup\cdots\cup U_{k_n})}=\overline{U}_{k_1}\cup\overline{U}_{k_2}\cup\cdots\cup\overline{U}_{k_n}$$

不包含x，所以$x\notin\overline{K}$．故K是闭的.

以上得到了映射$X\to X(=\mathscr{M})$及映射$X(=\mathscr{M})\to X$都是连续的，所以X上的原来拓扑与Gelfand拓扑完全一样，也就是$\mathscr{M}=X$．由$\hat{f}(\varphi)=f(a)$知$\hat{C}(\mathscr{M})=\hat{C}(X)=C(\mathscr{M})$.

由此得知$\hat{C}(X)$就是原来的Banach代数$C(X)$．我们知道引入Gelfand变换的目的是将一般的Banach代数具体化．现$C(X)$已是具体的Banach代数，在Gelfand代数同态下得到的象仍是$C(\mathscr{M})$也是具体的．这是紧空间X上讨论$C(X)$引出的必然结果.

若X不是紧空间，可以考虑X上的所有有界连续函数$C(X)$，仍用$\|\ \ \|_\infty$作为$C(X)$上的范数，得一个有单元的可交换的Banach代数．考虑$C(X)$上的极大理想集合$\mathscr{M}$．则必有

$$\mathscr{M}\neq X.$$

因为X不是紧的，而$\mathscr{M}$在Gelfand拓扑下是紧的．又任给$x\in X$，对应的$M_x=\{f\in C(X)\ |f(x)=0\}$必为极大理想，即$x\to M_x\in\mathscr{M}$．所以$\mathscr{M}\supset X$．这样一来，对于$X$，得到包含$X$的紧空间$\mathscr{M}$，称$\mathscr{M}$为$X$的Stone-Cech紧化.

由此知若X不是紧空间，则可将X嵌入到一个紧空间$\mathscr{M}$中．其办法之一是考虑X上的有界连续函数集合$C(X)$，作成一个Banach代

数，研究$C(X)$的结构空间，即极大理想空间，即得$\mathscr{M}$。

另外还有一种最常用的紧化方法，叫做一点紧化(*one-point-compactification*)。若X不紧，考虑

$$X_p = X \cup \{p\}, \quad p \notin X.$$

在X_p上定义开集如下：$U \subset X_p$是开集是指：

(1) $P \notin U$且U是X中的开集，

或 (2) $P \in U$且$X_p \setminus U$在X中是紧且闭的。

不难验证，这样定义的开集是X_p上的拓扑，且可将X嵌入到X_p中，同时X_p是紧的。

例如当$X=\boldsymbol{R}$加上一点$p=\infty$得X_∞。则在X_∞中或者(a, b)是开的，或者余集为闭区间的集合是开集。X_∞是紧的且X嵌入X_∞中。

例 令$A(U)=\{f: \overline{U} \to \boldsymbol{C} \mid f$在$\overline{U}$上连续，在$U$内解析$\}$，其中$U$为单位圆。取$\|f\|_\infty$为范数，则$A(U)$是一个可交换的具有单元的Banach代数。现在研究它的非零代数同态φ，即研究$A(U)$的结构空间$\varDelta(A)$。

在$A(U)$中取$f_0(z)=z$，则$\varphi(f_0)$为一复数，记作α，$\varphi(f_0)=\alpha$。由$f_0(z)=z$及$f_0^n(z)=z^n$，得

$$\begin{aligned} P_n(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \\ &= (c_0 + c_1 f_0 + c_2 f_0^2 + \cdots + c_n f_0^n)(z) \\ &= P_n(f_0) z. \end{aligned}$$

由于$\varphi(f_0)=\alpha$，且α为代数同态，故

$$\varphi(p_n) = p_n(\alpha),$$

即φ作用在多项式$P_n(z)$上是已知的。

现在利用多项式在$A(U)$中是稠密的这个事实来求出当$f \in A(U)$时$\varphi(f)=?$

任取$f \in A(U)$，$f(z)$在单位圆上一致连续，故任给$\varepsilon>0$，存在r，$0<r<1$，使得

$$|f(z)-f(rz)|<\varepsilon$$

对一切$z \in \overline{U}$恒成立。又$f(rz)$在闭圆$|z| \leqslant 1$上解析，所以$f(rz)$可

以展成幂级数：

$$f(rz)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(rz)^n.$$

且该幂级数在单位圆 $|z|\leqslant$上一致收敛.

记 $P_k=\sum_{n=0}^{k}a_n(rz)^n$，则 $\lim_{k\to\infty}P_k=f$。又φ是代数同态，φ连续且$\|\varphi\|\leqslant 1$，所以

$$\varphi(f)=\varphi(\lim_{k\to\infty}P_k)=\lim_{k\to\infty}\varphi(P_k)=\lim_{k\to\infty}P_k(a)=f(a).$$

其中$a=\varphi(f_0)\in \boldsymbol{C}$. 又$f_0(z)=z$，有

$$|a|=|\varphi(f_0)|\leqslant\|\varphi\|\|f_0\|_\infty\leqslant\|f_0\|_\infty=1.$$

故$a\in\overline{U}$.

由此得出，任给$\varphi\in\varDelta(\boldsymbol{A})$，则有$a\in\overline{U}$，使得

$$\varphi(f)=f(a),\quad\forall f\in A(U)$$

反之，任给 $a\in\overline{U}$，可定义φ：$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}$为

$$\varphi(f)=f(a).$$

则显然φ是一个代数同态，且$\varphi(f_0)=f_0(a)=a$.

综上讨论，$\varphi\in\varDelta(A(U))$与$a\in\overline{U}$构成一一对应$\varphi\longleftrightarrow a$. 即$\varDelta(A(U))\longleftrightarrow\overline{U}$. 这就是说$A(U)$的结构空间就是单位圆$\overline{U}$.

可以证明$\varDelta(A(U))$的Gelfand拓扑就是复平面上单位圆$\overline{U}$上的一般扑拓.

§3.6 无单元的Banach代数

对于无单元的Banach代数A，同样可以研究它的极大理想集合$\mathscr{M}(A)$，也可以考虑它的非零代数同态的集合$\varDelta(A)$. 然而，从下面一个简单的例子可以看出，此时$\mathscr{M}(A)$和$\varDelta(A)$不再是一一对应的.

例 设A是Banach空间，在其上定义乘法如下：

$$x\cdot y=0,\quad\forall x,\ y\in A.$$

则显然A是一个可交换的Banach代数，没有单位元素.

然而，没有任何一个A到C的非零代数同态. 事实上，若$\varphi\in\Delta(A)$，$\varphi\neq 0$，则必存在$x\in A$使$\varphi(x)\neq 0$，但$xy=0 \quad \forall y\in A$，故

$$0=\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y).$$

又$\varphi(x)\neq 0$，所以$\varphi(y)=0$. 今取$y=x$得

$$0=\varphi(x^2)=(\varphi(x))^2.$$

与$\varphi(x)\neq 0$矛盾. 所以$\Delta(A)=\phi$.

再考虑$\mathscr{M}(A)$.任取$\varphi\in A^*$,令$I=\ker\varphi=\{x\in A\,|\varphi(x)=0\}$，则$I$必为一极大理想. 实际上$I$是$A$的子空间. 事实上，若$y\in I$，$z\in I$，则显然$y+z\in I$，且若$y\in I$则$\alpha y\in I$($\because\varphi(\alpha y)=\alpha\varphi(y)=0$)，又若$x\in A$，$y\in I$，则$xy=0$，故$\varphi(xy)=0$，所以$xy\in I$.

由以上事实知$\Delta(A)$与$\mathscr{M}(A)$不是一一对应的.

我们知道，没有单元的Banach代数A可嵌入到有单元的Banach代数A_e中，其中

$$A_e=\{(x,\alpha)\,|x\in A,\ \alpha\in C\}.$$

且$\|(x,\ \alpha)\|=\|x\|+|\alpha|$，$A\to A_e$是指$x\to(x,\ 0)$，且$\|x\|=\|(x,\ 0)\|$.

下面证明A是A_e的一个极大理想. 因为

$$A=\{(x,\ 0)\,|x\in A\}.$$

又按乘法定义，对于$(y,\ \alpha)\in A_e$有

$$(x,\ 0)(y,\ \alpha)=(xy+\alpha x,\ 0)\in A,$$

故A为一个理想. 若$I\supsetneqq A$是一个理想，则必存在$(x,\ \alpha)\in I$，而$(x,\ \alpha)\notin A$，即$\alpha\neq 0$. 又$(-x,\ 0)\in A\subset I$，故$(x,\ \alpha)+(-x,\ 0)=(0,\ \alpha)\in I$，又$\alpha\neq 0$，故$(0,\ \alpha)$可逆，所以$(0,\ 1)=e\in I$. 即$I=A_e$，$A$是极大理想得证.

由于A_e具有单元，故$\mathscr{M}(A_e)$和$\Delta(A_e)$是一一对应的. 令ψ_0是A_e上的非零代数同态，其核为A，现在研究$\mathscr{M}(A_e)\setminus\{A\}$,也就是

研究$\Delta(A_e)\setminus\{\psi_o\}$.任取$\psi\in\Delta(A_e)\setminus\{\psi_o\}$，将$\psi$限制在$A$上，由于$\ker\psi\neq A$，故$\psi$可以看成$A\to C$的非零代数同态。

$$\psi|_A(x)=\psi((x,0)),\ \psi|_A\neq 0.$$

反之，若ψ是$A\to C$的非零代数同态，则ψ可唯一地扩张到A_e上，事实上，由于ψ是代数同态，故可按以下方法将ψ扩张到A_e上：

$$\psi((x,\alpha))=\psi((x,0))+\psi((0,\alpha)).$$

又$\psi((0,1))=1$，故$\psi((0,\alpha))=\alpha\psi((0,1))=\alpha$，所以

$$\psi((x,\alpha))=\psi((x,0))+\alpha.$$

显然这种扩张是唯一的，且将$\psi: A_e\to C$限制在A上即为原来的$A\to C$的代数同态。

由以上讨论知，可以将A嵌入到A_e中，对A_e应用§3.5的结论知$\mathscr{M}(A_e)\setminus\{A\}$与$\Delta(A_e)\setminus\{\psi_o\}$构成一一对应，即$\psi\in\Delta(A_e)\setminus\{\psi_o\}$与$\ker\psi=M\in\mathscr{M}(A_e)\setminus\{A\}$是一一对应的.将$\psi$限制在$A$上，记为$\psi|_A$.令$\varphi=\psi|_A$，则显然$\varphi\in\Delta(A)$.我们知道$\ker\varphi=\ker\psi|_A=(\ker\psi)\cap A$.且$\ker\varphi$为$A$中的极大理想．前面的例子已经说明$\Delta(A)$不再和$A$的极大理想集合相对应，那么我们要问$\Delta(A)$对应“什么”？也就是$\Delta(A)\longleftrightarrow$“？”，“？”又和$A$的极大理想集合有什么关系.

若φ是$A\to C$的一个非零代数同态，则$\ker\varphi$必是A的极大理想。由于φ是代数同态，故存在$v\in A$使$\varphi(v)=1$．于是

$$\varphi(x-xv)=\varphi(x)-\varphi(x)\varphi(v)=0,\ \forall x\in A.$$

即 $$x-xv\in\ker\varphi,\qquad \forall x\in A.$$

定义4 若无单元的可交换的Banach代数A中的理想I，具有以下性质：存在$v\in A$，使得$x-xv\in I$对一切$x\in A$成立，则称I为正则理想。

可见，若$\varphi\in\Delta(A)$，则$\ker\varphi$是A上的正则极大理想。

定理16 若A是无单元的可交换的Banach代数，对于A的任一正则极大理想M，必存在一个$A\to C$的非零代数同态φ_M，使得$\ker\varphi_M=M$。

证 首先证明M是闭集.因为M是正则极大理想，故存在$v\in A$使

得$x-xv\in M$对一切$x\in M$成立，可以证明对一切$y\in M$必有$\|v-y\|\geqslant 1$。

用反证法，若存在$y\in M$使$\|v-y\|<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v-y)^n$是收敛的。令

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v-y)^n=z \qquad (n\neq 0\text{，因为}A\text{中无单元}),\quad z\in A.$$

又

$$(v-y)z=\sum_{n=2}^{\infty}(v-y)^n,$$

故
$$(v-y)z+(v-y)=\sum_{n=1}^{\infty}(v-y)^n=z.$$

所以
$$v=y+z-vz+yz.$$

因为M是正则理想$z-vz\in M$，$y\in M$，$yz\in M$。所以$v\in M$。故对一切$x\in A$有$xv\in M$。又$x-xv\in M$，所以$x\in M$。由此得到$A=M$，与M是极大理想矛盾。所以对一切$y\in M$必有$\|v-y\|\geqslant 1$。

由此知$v\notin \overline{M}$，故$\overline{M}\neq A$，又$M\subset\overline{M}\subsetneqq A$，而$\overline{M}$也是理想，所以$M=\overline{M}$。这就证明了$M$是闭集。

M是闭集，作商集合A/M，则A/M是Banach代数，又因为$x-xv\in M$，所以A/M具有单元$\dot{v}=v+M$。又M是极大理想，故A/M是一个域。根据Gelfand—Mazur定理，$A/M=C\dot{v}$，即对$x\in A$，则$\dot{x}=x+M$对应一个复数$\varphi_M(x)$，使$\dot{x}=\varphi_M(x)\dot{v}$，也就是说有代数同态$\varphi_M$使$x\in A$对应复数$\varphi_M(x)$。即

$$x\longleftrightarrow\varphi_M(x),\quad \forall x\in A.$$

而且$\ker\varphi_M(x)=M$。这样的φ_M就是所求的代数同态。定理得证。

若以$\mathscr{M}(A)$代表A中所有正则极大理想集合，则$\Delta(A)$和$\mathscr{M}(A)$一一对应：$\Delta(A)\longleftrightarrow\mathscr{M}(A)$。这样就回答了前面提出的问题。“?”$=\mathscr{M}(A)$。

再讨论Gelfand变换$\hat{x}$: $\mathscr{M}(A)\to C$. 与前同有

$$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x),\ \forall x\in A.$$

其中$\varphi\in\mathscr{M}(A)$. 由于A可扩张成A_e, 使$x\in A$与$(x,0)\in A_e$相对应. 故$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x)$相应地可写成

$$\widehat{(x,0)}|_{\Delta(A_e)\setminus\{\psi_0\}}(\varphi)=\varphi(x),$$

或

$$\widehat{(x,0)}|_{\mathscr{M}(A_e)\setminus\{A\}}(\varphi)=\varphi(x).$$

即　　$\widehat{(x,0)}\psi|_A=\widehat{(x,0)}\psi(x,0)=\widehat{(x,0)}\varphi(x)$.

其中　　$\varphi(x)=\psi|_A=\psi(x,0)$.

$\mathscr{M}(A_e)$上的Gelfand拓扑就是$\mathscr{M}(A)$上的拓扑. $\mathscr{M}(A)$是将$\mathscr{M}(A_e)$去掉一点A,所以$\mathscr{M}(A)$是$\mathscr{M}(A_e)$的子空间: $\mathscr{M}(A)=\mathscr{M}(A_e)\setminus\{A\}$. 又在Gelfand拓扑下$\mathscr{M}(A_e)$是紧的, 故$\mathscr{M}(A)$是局部紧的. 即$\mathscr{M}(A)$在Gelfand拓扑(使一切$\hat{x}$ $(x\in A)$连续的最弱拓扑)下是局部紧Hausdorff空间.

又$\widehat{(x,0)}\psi_0=\psi_0(x)=0$即$\hat{x}$在$\psi_0$上为零, 故$\hat{x}\in C_\infty(\mathscr{M}(A))$. ψ_0是$\mathscr{M}(A)$中去掉的一点, 故可用一点紧化方法将$\mathscr{M}(A)$紧化.

令$\hat{A}=\{\hat{x}\,|\,x\in A\}$, 由于$\hat{x}$在$\{\psi_0\}$上为零: $\hat{x}(\psi_0)=0$. 故$\hat{A}$没有单元. 与有单元的Banach代数上的结论相同, $\hat{A}$也可以区分点.

下面再讨论可交换的Banach代数A的Gelfand变换的值域. 首先讨论A有单元的情形.

若A是有单元的可交换的Banach代数, 其Gelfand变换$\hat{x}$: $\mathscr{M}(A)\to C$在Gelfand拓扑下是连续的. 其值域记为

$$\hat{x}(\mathscr{M})=\{\hat{x}(\varphi)\,|\,\varphi\in\Delta(A)\}.$$

可以证明$\hat{x}(\mathscr{M})=\sigma(x)$.

事实上, $\lambda\in\sigma(x)\Longleftrightarrow x-\lambda e\notin G\Longleftrightarrow x-\lambda e\in I$, I是A的某个真理想.

又I必含于某个极大理想中, 即存在$M\in\mathscr{M}(A)$使得$I\in M$. 所

以

$\lambda\in\sigma(x)\Longleftrightarrow x-\lambda e\in M,\ M\in\mathscr{M}(A)\Longleftrightarrow$存在$\varphi\in\varDelta(A)$使得$\varphi(x-\lambda e)=0\Longleftrightarrow$存在$\varphi\in\varDelta(A)$使得$\varphi(x)=\lambda$.

又$\varphi(x)=\hat{x}(\varphi)$，所以$\hat{x}(\mathscr{M})=\sigma(x)$.

由此得出

$$\|\hat{x}\|_\infty=\sup\{|\hat{x}(\varphi)|\,|\,\varphi\in\varDelta(A)\}=\sup\{\lambda\,|\lambda\in\sigma(x)\}$$

所以
$$\|\hat{x}\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

再研究A没有单元的情形．若A是无单元可交换的Banach代数，则将A扩张成A_e．由以上讨论知

$$\hat{x}(m(A_e))=\sigma_{A_e}(x).$$

又$(x,0)-\lambda(0,1)$当$\lambda=0$时不可逆，故$0\in\hat{x}(\mathscr{M}(A_e))$．再将$\hat{x}$限制在$\mathscr{M}(A)$上，定义

$$\sigma(x)=\{0\}\cup\{\hat{x}(\mathscr{M}(A))\}.$$

另外，自然要研究A无单元时如何去定义它的逆元素．

定义 5．若A是无单元的可交换的Banach代数，$x,y\in A$，若$x+y=xy$，则称x,y互为拟逆．

定义 5 的含义是，若将x和y放入A_e中去研究，则$x-e$和$y-e$互为逆元素．事实上，若

$$(x-e)(y-e)=xy-x-y+e=e,$$

则必有
$$xy=x+y.$$

由拟逆的定义容易看出，对于$x\in A$，

$$\sigma(x)=\{0\}\cup\{\lambda\in\boldsymbol{C}|\,\lambda^{-1}x\text{无拟逆}\}.$$

（读者自己证明）．

§ 3.7 Banach代数应用举例

下面给出两个定理，定理本身并不包含Banach 代数概念，但可以通过Banach代数的技巧加以证明.

定理17. 设$A(U)=\{f: \overline{U}\to C|\ f$在$\overline{U}$上连续，$f|_U$是解析的$\}$. 假设$f_1, f_2, \cdots, f_n \in A(U)$，使得

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+\cdots+|f_n(z)|>0$$

对一切$z\in\overline{U}$恒成立，则存在$g_1, g_2\cdots, g_n\in A(U)$使得

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)g_i(z)=1. \ (z\in\overline{U})$$

证 由§ 3.5的讨论知$A(U)$是有单元的可交换的Banach 代数，且$\Delta(A(U))\longleftrightarrow\overline{U}$. 即对$\varphi\in\Delta(A(U))$，$\varphi\longleftrightarrow\alpha\in\overline{U}$，使得$\varphi(f)=f(\alpha)$，$(f\in A(U))$.

现在考虑

$$I=\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i f_i \mid\ g_i\in A(U)\right\},$$

可以证明，I是$A(U)$中的理想. 若能证明$I=A(U)$. 则I包含有单元，即存在$g_i\in A(U)$，使$\sum_{i=1}^{n} g_i f_i=1$，定理得证. 也就是说我们要证明I不是真理想，为此只需证明I不包含在$A(U)$的任何一个极大理想中. 又每一个极大理想都是某个非零代数同态的核，因此问题归结为需要证明任何一个代数同态$\varphi(A)$，至少有一个$h\in I$，使得$\varphi(h)\neq 0$.

任取$\varphi\in\Delta(A(U))$. 存在$\alpha\in\overline{U}$与之相对应且$\varphi(f)=f(\alpha)$，$(f\in A(U))$. 又对$z\in\overline{U}$，由题设有

$$|f_1(z)|+|f_2(z)|+\cdots+|f_n(z)|>0,$$

所以，对于以上所确定的$\alpha\in\overline{U}$，有

$$|f_1(\alpha)|+|f_2(\alpha)|+\cdots+|f_n(\alpha)|>0.$$

因此必有某个f_i，使得$f_i(\alpha)\neq 0$．所以$\varphi(f_i)\neq 0$。又$f_i\in I$，故$I\notin \ker\varphi$．于是有$I=A(U)$．证毕．

定理18. （Wiener定理） 假设

$$f(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{in\theta},\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|<\infty$$

且对每一个$\theta\in\boldsymbol{R}$，$f(e^{i\theta})\neq 0$，则

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n e^{in\theta},\ \text{且有}\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|d_n|<\infty.$$

证 记$\boldsymbol{T}$为单位圆周$|z|=1$。令

$$A=\left\{g:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{C}\ \Big|\ g(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{in\theta},\ \text{且}\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|<\infty\right\}.$$

在A上定义运算：

$$(g+h)(e^{i\theta})=g(e^{i\theta})+h(e^{i\theta}),$$
$$(\alpha g)(e^{i\theta})=\alpha g(e^{i\theta}),$$
$$(gh)(e^{i\theta})=g(e^{i\theta})\cdot h(e^{i\theta}),$$

并定义范数

$$\|g\|=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|.$$

可以证明A是一个有单元的Banach代数．事实上，A等距同构于l^1：

$$l^1=\left\{f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{C}\ \Big|\ \sum_{-\infty}^{+\infty}|f_n|<\infty\right\}$$

在§3.1中已经指出，当在l^1中加法与数乘定义为按坐标相加与相乘，乘法定义为卷积

$$(f*g)_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f_k g_{n-k},$$

且取范数为 $\|f\|_1=\sum_{-\infty}^{+\infty}|f_n|$，

则l^1为一个有单元的可交换的Banach代数。

若$g\in A$，则$(b_n)\in l^1$，$g\longleftrightarrow(b_n)$。$A$中的加法与数乘显然和$l^1$中的加法与数乘相对应。现在看乘法。若$g,h\in A$，则

$$gh(e^{i\theta})=g(e^{i\theta})\cdot h(e^{i\theta})=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m e^{im\theta}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_j a_{k-j}e^{ik\theta}.$$

所以 $$gh\longleftrightarrow\sum_{j=-\infty}^{+\infty}b_j a_{n-j}.$$

又A与l^1的范数定义是相同的，故A等距同构于l^1，$A\cong l^1$。故A为一个有单元的可交换的Banach代数。

为了用A上的Gelfand表示理论来解决所提出的问题，下面研究$A\to C$代数同态的结构。因为若$f\in A$，$f(e^{i\theta})\neq 0$，若能证明f在A中可逆，则定理得证。为此只需证明

$$f\notin M,\qquad \forall M\in\mathscr{M}(A).$$

即 $$f\notin\ker\varphi,\qquad \forall\varphi\in\Delta(A).$$

也就是 $$\varphi(f)\neq 0\qquad \forall\varphi\in\Delta(A).$$

先研究φ的结构。

任取$\varphi\in\Delta(A)$，令$f_0(e^{i\theta})=e^{i\theta}$，显然$f_0\in A$，且$\frac{1}{f_0}\in A$。令$\varphi(f_0)=\lambda$。由于$\varphi$是代数同态，所以$\varphi(\frac{1}{f_0})=\frac{1}{\lambda}$。又$\|f_0\|=1$，且$\|\varphi\|\leqslant 1$。得

$$|\lambda|=|\varphi(f_0)|\leqslant\|\varphi\|\;\|f_0\|\leqslant 1.$$

另一方面 $\left\|\frac{1}{f_0}\right\|=1$，有

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right|=\left|\varphi\left(\frac{1}{f_0}\right)\right|\leqslant\|\varphi\|\left\|\frac{1}{f_0}\right\|\leqslant 1,$$

所以 $|\lambda|=1$，即 $\lambda=e^{i\theta}$.

以上事实说明，对于每个$\varphi\in\varDelta(A)$，都对应一个点$e^{i\theta}\in\boldsymbol{T}$，使得

$$\varphi(f_0)=e^{i\theta}=f_0(e^{i\theta}).$$

由于φ是代数同态，故

$$\varphi(f_0^n)=(\varphi(f_0))^n=e^{in\theta}=f_0^n(e^{i\theta}),\qquad n\in\boldsymbol{Z}.$$

于是对于三角多项式p，有

$$\varphi(p)=p(e^{i\theta}).$$

由三角级数在A中的稠密性，得

$$\varphi(g)=g(e^{i\theta}),\ \forall g\in A.$$

这就是说，对每一个$\varphi\in\varDelta(A)$，都能找到$\boldsymbol{T}$中一点$e^{i\theta}$与之相对应。反过来，对$e^{i\theta}\in\boldsymbol{T}$，考虑$\varphi$：$g\xrightarrow{\varphi}g(e^{i\theta})$，则$\varphi$必为非零代数同态。（$\because\varphi(1)=1(e^{i\theta})=1$）即$\varphi\in\varDelta(A)$。这样我们得到

$$\varDelta(A)\equiv\boldsymbol{T}.$$

可以验证$\varDelta(A)$上的Gelfand拓扑正是$\boldsymbol{T}$上原来的拓扑.

回到wiener定理. 因为$f(e^{i\theta})\neq 0$，即$\boldsymbol{T}$上没有任何一点能使f变为0，故

$$\varphi(f)=f(e^{i\theta})\neq 0,\ \forall\varphi\in\varDelta(A).$$

即f不能属于A的任何一个代数同态的核. 所以f可逆，即

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n e^{in\theta}$$

成立. 定理得证.

在证明wiener定理的过程中，证明了$A\cong l^1$，，且$\varDelta(A)=\boldsymbol{T}$或$\mathscr{M}(A)=\boldsymbol{T}$. 还可以进一步描述$A$和$f\in A$的Gelfand变换$\hat{f}$.

$l^1=\{f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{C}\mid\sum_{-\infty}^{+\infty}|f_n|<\infty\}$. $\boldsymbol{Z}$是一个加法群，在$\boldsymbol{Z}$上取离散拓扑，则$\boldsymbol{Z}$成为可交换的拓扑群. 还可以在$\boldsymbol{Z}$上取计数测度

μ，μ关于平移是不变的．于是可以定义

$$L^1(Z)=\{f:\ Z\to C\ |\int_Z |f_n|\,\mathrm{d}\mu(n)<\infty\}.$$

由于

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|f_n|=\int_Z |f_n|\,\mathrm{d}\mu(n),$$

所以 $$l^1=L^1(Z),$$

即 $$l^1=A=L^1(Z).$$

由此知$L^1(Z)$的所有极大理想是与单位圆周一一对应的．现在研究Gelfand变换．

任给$f\in A=L^1(Z)$，

$$\hat{f}(e^{i\alpha})=\hat{f}(\varphi_\alpha)=\varphi_\alpha(f)=f(e^{i\alpha})\quad(f\text{看作}A\text{的元})$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}f_n e^{in\alpha}\quad(f\text{看作}l^1\text{的元})$$

$$=\int_Z f_n e^{in\alpha}\mathrm{d}\mu(n).$$

为了与习惯上一致，可以用$e^{-i\alpha}$代替$e^{i\alpha}$，即$\varphi_\alpha(f)=f(e^{-i\alpha})$，则

$$\hat{f}(e^{i\alpha})=\int_Z f_n e^{-in\alpha}\mathrm{d}\mu(n)=\sum_{-\infty}^{+\infty}f_n e^{-in\alpha}.$$

所以Gelfand变换就是Fourier变换的逆变换．

§3.8 群代数$L^1(\mathbf{R})$、$L^1(\mathbf{T})$、$L^1(\mathbf{Z})$上的Gelfand理论．

在§3.1中指出，在一个局部紧的交换群G上，存在一个不变的Haar测度ν，于是可以研究$L^1(G)$．

$$L^1(G)=\{f: G\to \boldsymbol{C} \mid \int_G |f(x)|\, d\gamma(x)<\infty\},$$

再定义范数

$$\| f \|_1=\int_G |f(x)|\, d\gamma(x).$$

则$L^1(G)$构成一个Banach空间，若再定义乘积

$$f*g(x)=\int_G f(y)g(x-y)d\gamma(y).$$

则$L^1(G)$是一个可交换的Banach代数。

$L^1(G)$是一个Banach空间，它的共轭空间为$L^\infty(G)$，即

$$L^1(G)^*=L^\infty(G).$$

其中$L^\infty(G)=\{\gamma(x):G\to \boldsymbol{C} \mid \sup\gamma(x)<\infty,\ p.p.\text{且}\gamma(x)\text{可测}\}$.
即任给$\varphi\in L^1(G)^*$，存在唯一的$\gamma(x)\in L^\infty(G)$，使得

$$\varphi(f)=\int_G f(x)\gamma(x)dx, \qquad \forall f\in L^1(G),$$

且
$$\|\varphi\| = \|\gamma\|_\infty.$$

又$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{Z}$是G的特例，$\boldsymbol{R}$是一个加法群，具有通常拓扑和Lebesgue测度。$\boldsymbol{T}$是一个乘法群，若将单位圆上的点$e^{i\alpha}$和实数$\boldsymbol{R}$中$[-\pi,\pi]$上的点α相对应，则也可将$\boldsymbol{T}$看成等价于关于2π的同余加法群，即$\alpha+2\pi\equiv\alpha, \bmod 2\pi$。$\boldsymbol{T}$上具有通常拓扑和不变测度$\frac{1}{2\pi}\mu$。
$\boldsymbol{Z}$是一个加法群具有离散拓扑和计数测度．因此可以研究$L^1(\boldsymbol{R})$，$L^1(\boldsymbol{T})$，$L^1(\boldsymbol{Z})$。

若f：$G\to\boldsymbol{C}$，定义f_y仍为$G\to\boldsymbol{C}$的映射，且

$$f_y(x)=f(x-y),$$

则有以下二事实：

(1) $\|f\|_1=\|f_y\|_1$.

(2)对于每一个$f\in L^1(G)$，映射$x\to f_x$是由G到$L^1(G)$的连续映射，即当x,y很接近时$\|f_x-f_y\|_1$可以任意小。

为了讨论群代数$L^1(G)$，先给出Fubini定理。

定理19. (Fubini定理).设$(X,\mathscr{S},\mu)$和$(Y,\mathscr{F},\lambda)$是σ

一有限的测度空间，$f(x,y)$是$X\times Y$上的$(\mathscr{S}\times\mathscr{T})$—可测函数.

(1)若$0\leqslant f(x,y)\leqslant\infty$，且若

$$\varphi(x)=\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\lambda,\quad x\in X,\ y\in Y,$$

$$\psi(y)=\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu,\quad x\in X,\ y\in Y,$$

则φ是$\mathscr{S}$—可测的，ψ是$\mathscr{T}$—可测的，且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\lambda)=\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_Y \psi(y)\mathrm{d}\lambda,$$

或写成

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\lambda)=\int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y)$$

$$=\int_Y \mathrm{d}\lambda(y)\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x).$$

(2)若$f\in L^1(\mu\times\lambda)$，则存在$\mu$—零测集$A_x$，使得对每一个$x\in X\setminus A_x$，$f(x\cdot y)$作为$y$的函数在Y上可积，即$f(x,y)\in L^1(\lambda)$对几乎所有的$x\in X$成立.

同样，$f(x,y)\in L^1(\mu)$对几乎所有的$y\in Y$成立.

若
$$\varphi(x)=\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\lambda,\ a.e.$$

$$\psi(y)=\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu,\ a.e.$$

则$\varphi\in L^1(\mu)$，$\psi\in L^1(\lambda)$，且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\times\lambda)=\int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\lambda(y)$$

$$=\int_Y \mathrm{d}\lambda(y)\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x).$$

1. $L^1(\boldsymbol{R})$、$L^1.(\boldsymbol{T})$、$L^1(\boldsymbol{Z})$上的代数同态（结构空间或极大理想）.

（1）$L^1(\boldsymbol{R})=\left\{f: \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{C} \mid f\right.$ Borel可测，$\left.\int_{\mathrm{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)<\infty\right\}$.

注意，两个几乎处处相等的函数，我们认为是等值的；也就是考虑子空间

$$N=\{f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C} \mid \int_{\mathrm{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)=0\},$$

则按子空间N决定了一个等价关系．即若$f_1,f_2\in L^1(\boldsymbol{R})$，当$f_1-f_2\in N$时，则说$f_1$和$f_2$是等值的．$L^1(\boldsymbol{R})$中的元素，实质上是这样的等价类的集合．另外，如果$f$是$\boldsymbol{R}$上的Lebesgue可测函数，则在$\boldsymbol{R}$上存在一个Borel可测函数$g$，使得$f=g$ $a.e.$ 这就是说，可以在含f的等价类中找到一个函数g是Borel可测的(证明从略).

在$L^1(\boldsymbol{R})$中定义了普通的加法和数乘以后，取范数

$$\|f\|_1=\int_{\mathrm{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_{\mathrm{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

则$L^1(\boldsymbol{R})$是一个Banach空间．再利用卷积定义乘法

$$f*g(x)=\int_{\mathrm{R}}f(y)g(-y+x)\mathrm{d}y,\quad f,\ g\in L^1(\boldsymbol{R}).$$

可以证明$L^1(\boldsymbol{R})$构成一个可交换的Banach代数．首先验证范数：

$$\|f*g\|_1=\int_{\mathrm{R}}|f*g|\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{R}}\left|\int_{\mathrm{R}}f(y)g(-y+x)dy\right|\mathrm{d}x.$$

这是一个累次积分，由Fubini定理有

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1&\leqslant\iint|f(y)g(-y+x)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathrm{R}}|f(y)|\,\mathrm{d}y\int_{\mathrm{R}}|g_y(x)|\,\mathrm{d}x\\&=\|f\|_1\|g_y\|_1=\|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

同理，用Fubini定理可证$f*(g*h)=(f*g)*h$.

再证明$L^1(\boldsymbol{R})$的可交换性．注意到Lebesgue测度的不变性，以及若A可测，则$-A$必可测，且测度相等．事实上有

$$f*g(x)=\int_{\mathbf{R}}f(y)g(-y+x)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}}f(x+y)g(-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbf{R}}f(x-y)g(y)dy=g*f(x).$$

因此，$L^1(\boldsymbol{R})$是一个可交换的Banach代数．现在研究$\varDelta(L^1(\boldsymbol{R}))$．取$\varphi\in\varDelta(L^1(\boldsymbol{R}))$，则$\varphi$一定是一个有界线性变换（$\|\varphi\|\leqslant 1$），故

$$\varphi\in L^1(R)^*=L^\infty(R).$$

即对于$\varphi\in L^1(\boldsymbol{R})^*$，存在唯一的$\gamma(x)\in L^\infty(\boldsymbol{R})$，使得

$$\varphi(f)=\int_{\mathbf{R}}f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

且 $\|\varphi\|=\|\gamma\|_\infty$　　（$\gamma(x)$是有界的Borel函数）.

又φ是代数同态保持乘法，

$$\varphi(f*g)=\varphi(f)\cdot\varphi(g)$$

$$\varphi(f*g)=\int_{\mathbf{R}}(f*g(x))\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\iint f(y)g(x-y)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\mathbf{R}}f(y)\left(\int_{\mathbf{R}}g_y(x)\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbf{R}}f(y)\varphi(g_y)\mathrm{d}y.$$

又 $$\varphi(f)\cdot\varphi(g)=\int_{\mathbf{R}}\varphi(g)f(y)\overline{\gamma(y)}\,dy,$$

所以

$$\int_{\mathbf{R}}f(y)\varphi(g_y)\,dy=\int_{\mathbf{R}}\varphi(g)f(y)\overline{\gamma(y)}\,dy.$$

即 $$\int_{\mathbf{R}}f(y)(\varphi(g_y)-\varphi(g)\overline{\gamma(y)})dy=0,\quad \forall f\in L^1(\boldsymbol{R}).$$

所以 $$\varphi(g_y)=\varphi(g)\overline{\gamma(y)}.\ a.e. \tag{4}$$

事实上，若$\varphi(g_y)-\varphi(y)\overline{\gamma(y)}\neq 0$在一个测度大于零的集合$E$上成立($E\subset\boldsymbol{R}$)，则取$f(y)$为$E$的特征函数，于是$\int_R f(y)(\varphi(g_y)-\varphi(y)\overline{\gamma(y)})dy\neq 0$，矛盾。

由于$y\to g_y$是由$\boldsymbol{R}$到$L^1(\boldsymbol{R})$上的连续函数，φ是连续的，故$\varphi(g_y)$是y的连续函数。

由于φ是非零代数同态，故可取$g\in L^1$使得$\varphi(g)\neq 0$。又(4)式左端是y的连续函数，故可改变$\gamma(y)$在一个零测集上的值，使(4)式对于y处处成立，而且在零测集上改变$\gamma(y)$的值并不影响(3)式。这样，就可以认为$\gamma(x)$是连续的，也就是由等价类中取出一个连续函数$\gamma(x)$。于是得到

$$\varphi(g_y)=\varphi(g)\overline{\gamma(y)},\quad \forall g\in L^1,\quad \forall y\in\boldsymbol{R}.$$

利用上式得

$$\varphi(g_{x+y})=\varphi(g)\overline{\gamma(x+y)}.$$

另一方面 $g_{x+y}=(g_x)_y$,

事实上，$g_{x+y}(z)=g(z-x-y)=g((z-y)-x)=g_x(z-y)=(g_x)_y(z)$。

又 $$\varphi((g_x)_y)=\varphi(g_x)\overline{\gamma(y)}=\varphi(g)\overline{\gamma(x)}\,\overline{\gamma(y)},$$

所以有

$$\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y).$$

又 $\|\gamma\|_\infty=\|\varphi\|\leqslant 1$，且 $\gamma(x)=\gamma(0)\gamma(x)$，所以 $\gamma(0)=1$．由 $1=\gamma(0)=\gamma(x)\gamma(-x)$，得 $\gamma(-x)=\gamma(x)^{-1}$．由此得到

$$|\gamma(x)|=1. \qquad \forall x\in \boldsymbol{R}.$$

因否则若 $|\gamma(x)|<1$，则 $|\gamma(-x)|>1$．与前面结论矛盾，所以

$$\|\gamma\|_\infty=1, \qquad |\gamma(x)|=1.$$

定义 6 若 $\gamma(x)$ 是$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$的映射，满足

（1） $\gamma(x)$连续，

（2） $\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y)$，$(x, y\in \boldsymbol{R})$

（3） $|\gamma(x)|=1$，　$(x\in \boldsymbol{R})$.

则称$\gamma(x)$为$\boldsymbol{R}$上的连续特征标.

定义中（2）、（3）表示$\gamma(x)$是从$\boldsymbol{R}$上的加法群到$\boldsymbol{T}$上的乘法群上的代数同态，即$\gamma(x)$是$\boldsymbol{R}$到$\boldsymbol{T}$上的变换，保持群的运算.

将$\boldsymbol{R}$上所有连续特征标的集合记作$\Gamma_R=\Gamma$，则以上结果表明，对任意$\varphi\in\Delta(L^1(\boldsymbol{R}))$，存在唯一的$\gamma\in\Gamma$，使得

$$\varphi(f)=\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x, \quad (f\in L^1(\boldsymbol{R}))$$

$$\|\varphi\|=\|\gamma\|_\infty=1.$$

反之，对每一个$\gamma\in\Gamma$，映射

$$f\xrightarrow{\varphi_\gamma}\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x \quad (f\in L^1(\boldsymbol{R}))$$

必是$L^1(\boldsymbol{R})$上的代数同态，即$\varphi_\gamma\in\Delta(L^1(R))$，现在证明这一事实.

由于积分的线性性质知φ_γ是线性的，故只需证明

$$\varphi_\gamma(f*g)=\varphi_\gamma(f)\cdot\varphi_\gamma(g).$$

利用Fubini定理，有

$$\varphi_\gamma(f*g)=\int_{\mathbf{R}}(f*g)(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\iint f(y)g(x-y)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\iint f(y)g(x)\overline{\gamma(x+y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\iint f(y)g(x)\overline{\gamma(x)}\;\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\varphi_\gamma(f)\cdot\varphi_\gamma(g).$$

φ_γ是非零代数同态。因为$\gamma(0)=1$，$\gamma(x)$是连续的，故若f在$x=0$附近不为零，在其余点等于零，则必有$\varphi_\gamma(f)\neq 0$。而且若$\varphi_{\gamma_1}\neq\varphi_{\gamma_2}$，由于

$$\varphi_{\gamma_1}(f)=\int_{\mathbf{R}}f(x)\overline{\gamma_1(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_{\gamma_2}(f)=\int_{\mathbf{R}}f(x)\overline{\gamma_2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

显然有，$\gamma_1(x)\neq\gamma_2(x)$。

归纳以上结论表明，$L^1(\boldsymbol{R})$上的代数同态φ和$\boldsymbol{R}$上的连续特征标$\gamma(x)$构成一一对应。

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{R}))\leftrightarrow\Gamma_{\boldsymbol{R}},$$

其对应关系由(3)式给出。

以上讨论了群代数$L^1(\boldsymbol{R})$的结构空间，在整个讨论过程中仅用到了$\boldsymbol{R}$的三个事实：

1） 实数$\boldsymbol{R}$是加法群。

2） 实数$\boldsymbol{R}$上通常拓扑和群的结构相容。

3） 实数上取一个不变测度。

因此，若将$\boldsymbol{R}$换成另外一个群，例如$\boldsymbol{R}$换成$\boldsymbol{T}$或$\boldsymbol{Z}$，只要利用以上三个事实，同样可以得到$L^1(\boldsymbol{T})$，$L^1(\boldsymbol{Z})$的结构空间。

（2） $L^1(\boldsymbol{T})=\left\{f: \boldsymbol{T}\to \boldsymbol{C} \mid \int_{\mathrm{T}} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)<\infty\right.$，或

$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}} |f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty\right\}.$$

$\boldsymbol{T}$是乘法群或等价于一个加法群关于2π同余，取不变测度$\frac{1}{2\pi}\mu$（单位圆对应于$[-\pi,\ \pi)$，测度为1）．则以上讨论仍成立．

定义乘法为卷积，即$f,g\in L^1(\boldsymbol{T})$

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

仿照以上作法得

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{T}))\longleftrightarrow\Gamma_T,$$

即 $$\varphi\longleftrightarrow\gamma(x).$$

其中$\gamma(x)$为T上连续特征标，且对应关系为

$$\varphi(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x.$$

（3） $L^1(\boldsymbol{Z})=l^1$.

$\boldsymbol{Z}$是加法群，具有离散拓扑和计数测度，此时

$$\int_{\mathrm{Z}} |f(n)|\,\mathrm{d}\mu(n)=\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(n)|.$$

乘法就是l^1上的卷积．同样得到

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{Z}))\longleftrightarrow\Gamma_Z$$

即 $$\varphi\longleftrightarrow\gamma(n)$$

其中$\gamma(n)$是$\boldsymbol{Z}$上的连续特征标，且对应关系为

$$\varphi(f)=\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n)\overline{\gamma(n)}.$$

可以将以上结论推广到任意$L^1(G)$上，其中G是局部紧群，使$L^1(G)$的结构空间和G上的连续特征标一一对应．

2. $L^1(\boldsymbol{R})$、$L^1(\boldsymbol{T})$、$L^1(\boldsymbol{Z})$的Gelfand变换.

(1)$L^1(\boldsymbol{R})$的Gelfand变换.

首先将连续特征标$\gamma(x)\in\Gamma_R$具体化. 任取$\gamma(x)\in\Gamma_R$. 由$\gamma(0)=1$且$\gamma(x)$连续知,存在$\delta>0$, 使得

$$\int_0^\delta \gamma(t)\mathrm{d}t=a\neq 0.$$

又$\gamma(x+t)=\gamma(x)\gamma(t)$, 有

$$\int_0^\delta \gamma(x+t)\mathrm{d}t=\gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)\mathrm{d}t=a\gamma(x).$$

另外, $$\int_0^\delta \gamma(x+t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\delta}\gamma(s)\mathrm{d}s,$$

所以 $$\int_x^{x+\delta}\gamma(s)\mathrm{d}s=a\gamma(x).$$

$\gamma(t)$连续, 所以$\int_x^{x+\delta}\gamma(s)\mathrm{d}s$ 对x具有连续导数,因此$\gamma(x)$具有连续导数。将等式

$$\gamma(x+t)=\gamma(x)\gamma(t)$$

两边对t微分,得

$$\gamma'(x+t)=\gamma(x)\gamma'(t).$$

令$t=0$, 得 $$\gamma'(x)=\gamma'(0)\gamma(x).$$

解以上微分方程, 得

$$\gamma(x)=\gamma(0)\mathrm{e}^{\gamma'(0)x}.$$

由于$\gamma(0)=1$, 得

$$\gamma(x)=\mathrm{e}^{\gamma'(0)x},$$

因为$|\gamma(x)|=1$, 所以$|\mathrm{e}^{\gamma'(0)x}|=1$, 即$\gamma'(0)$是纯虚数,

令

$$\gamma'(0)=\mathrm{i}y,\qquad y\in\boldsymbol{R},$$

得 $$\gamma(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}.$$

以上表明，对于每一个连续特征标$\gamma(x)\in\Gamma_R$都有一个实数y与之对应：$\gamma(x)\longleftrightarrow y$.

反之，对于每个$y\in R$，作映射

$$x\xrightarrow{\gamma_y}e^{iyx}.$$

则 $\gamma_y\in\Gamma_R$. 事实上

$$x_1+x_2\longrightarrow e^{iy(x_1+x_2)}=e^{iyx_1}e^{iyx_2},$$

即
$$\gamma_y(x_1+x_2)=\gamma_y(x_1)\gamma_y(x_2).$$

且γ_y连续，$|\gamma_y(x)|=|e^{iyx}|=1$，故$\gamma_y\in\Gamma_R$.

综合以上讨论，得

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{R}))\longleftrightarrow\Gamma_R\longleftrightarrow\boldsymbol{R}.$$

或
$$\varphi\longleftrightarrow\gamma(x):\ \varphi(f)=\int_{\mathbf{R}}f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx,\ f\in L^1(\boldsymbol{R}).$$

$$\gamma(x)\longleftrightarrow y:\ \gamma(x)=e^{iyx},\qquad y\in\boldsymbol{R}.$$

所以
$$\varphi\longleftrightarrow y:\quad \varphi(f)=\int_{\mathbf{R}}f(x)e^{-iyx}dx,\ f\in L^1(\boldsymbol{R}).\tag{5}$$

这就说明$L^1(\boldsymbol{R})$的结构空间$\Delta(L^1(\boldsymbol{R}))$和实数$\boldsymbol{R}$一一对应，对应关系由(5)式给出.

再研究Gelfand变换$\hat{f}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$.

若$f\in L^1(\boldsymbol{R})$，$\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$. 且$\varphi\longleftrightarrow y$，故得

$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbf{R}}f(x)e^{-iyx}dx.$$

因此群代数$L^1(\boldsymbol{R})$的结构空间就是$\boldsymbol{R}$本身，而且Gelfand变换就是Fourier变换.

(2)$L^1(T)$的Gelfand变换.

首先讨论Γ_T：$\Delta(L^1(\boldsymbol{T}))\longleftrightarrow\Gamma_T$. 即$\varphi\longleftrightarrow\gamma(x)$：

$$\varphi(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx.$$

取$\gamma\in\Gamma_T$，将Γ_T看成加法群且按2π成同余，则和以上讨论

完全相同，必存在$y\in\boldsymbol{R}$，使得

$$\gamma(x)=e^{iyx}.$$

由于Γ_T按2π同余，故

$$\gamma(x+2\pi)=\gamma(x).$$

即 $e^{iy(x+2\pi)}=e^{iyx}$，所以 $y=n$，即 $y\in\boldsymbol{Z}$，得到

$$\gamma(x)=e^{inx}.$$

这就是说，每一个连续特征标和一个整数相对应：$\gamma(x)\longleftrightarrow n$.

综上所述得

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{T}))\longleftrightarrow\Gamma_T\longleftrightarrow\boldsymbol{Z},$$

即 $$\varphi\longleftrightarrow\gamma(x):\ \varphi(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{\gamma(x)}\,dx,$$

$$\gamma(x)\longleftrightarrow n:\ \gamma(x)=e^{inx}.$$

所以 $$\varphi\longleftrightarrow n:\ \varphi(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx. \tag{6}$$

即$L^1(\boldsymbol{T})$的结构空间和整数$\boldsymbol{Z}$一一对应，其对应关系由(4)式给出.

再看 Gelfand 变换，$\hat{f}:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{C}$.

若$f\in L^1(\boldsymbol{T})$，$\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$. 且 $\varphi\longleftrightarrow n$，故得

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,\qquad f\in L^1(\boldsymbol{T}).$$

因此群代数$L^1(\boldsymbol{T})$的结构空间就是整数$\boldsymbol{Z}$，而且Gelfand变换就是单位圆上可积函数的Fourier系数.

(3) $L^1(\boldsymbol{Z})$的Gelfand变换.

先讨论Γ_Z，$\Delta(L^1(\boldsymbol{Z}))\equiv\Delta(l^1)\longleftrightarrow\Gamma_Z$. 即 $\varphi\longleftrightarrow\gamma(n)$:

$$\varphi(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)\overline{\gamma(n)}.$$

由Γ_Z的性质知，若$\gamma(1)$已知，则$\gamma(n)$即可求出，又$\gamma(1)$是复数，令$\gamma(1)=e^{ia}$，则

$$\gamma(n)=e^{in\alpha}.$$

即$\gamma\longleftrightarrow e^{i\alpha}$，也就是每个连续特征标和单位圆上一点相对应，即$\Gamma^Z\longleftrightarrow\boldsymbol{T}$。（在§3.7中我们用完全不同的方法讨论$\Delta(l^1)$，已得到$\Delta(l^1)\longleftrightarrow\boldsymbol{T}$）.所以有

$$\Delta(L^1(\boldsymbol{Z}))\longleftrightarrow\Gamma_Z\longleftrightarrow\boldsymbol{T}$$

即
$$\varphi\longleftrightarrow\gamma(n);\ \varphi(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)\overline{\gamma(n)},$$

$$\gamma(n)\longleftrightarrow e^{i\alpha};\ \gamma(n)=e^{in\alpha},$$

所以
$$\varphi\longleftrightarrow e^{i\alpha},\ \varphi(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)e^{-in\alpha}.\tag{7}$$

即$L^1(\boldsymbol{Z})$的结构空间和$\boldsymbol{T}$一一对应，对应关系由（7）式给出。

讨论Gelfand变换：$\hat{f}:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{C}$.

若$f\in L^1(\boldsymbol{Z})$，$\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$.

即
$$\hat{f}(e^{i\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)e^{-in\alpha}.$$

因此，群代数$L^1(\boldsymbol{Z})$的结构空间就是$\boldsymbol{T}$，而且Gelfand变换就是离散Fourier变换的逆变换。

以上$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{Z}$都是群，对于它们所得到的连续特征标集合Γ_R、Γ_T、Γ_Z在Gelfand拓扑下是紧的或局部紧的Hausdorff空间（当群代数有单元时特征标空间是紧的，无单元时是局部紧的）.

若对于特征标集合定义加法运算

$$(\gamma_1+\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)\cdot\gamma_2(x),$$

可以看出Γ也构成一个群。以上定义是自然的，因为$|\gamma(x)|=1$，$\gamma(x)$在$\boldsymbol{T}$上。这样Γ是个可交换群，且零元素为$\gamma(x)=1$，逆元素$\gamma^{-1}(x)=-\gamma(x)$.

一般地，对于任意一个局部紧的可交换群G，由G出发，利用G上的不变测度，作群代数$L^1(G)$．则$L^1(G)$的极大理想空间就是特征标集合Γ_G，它又是拓扑空间（Gelfand拓扑），同时Γ_G又是

群，可以证明Gelfand拓扑和群的结构相容．即Γ_G仍是一个局部紧的可交换群，叫做G的特征标群。

由于Γ_G也是局部紧的可交换群，自然也可以讨论Γ_G的特征标群Γ_{Γ_G}.著名的对偶定理理论指出$\Gamma_{\Gamma_G}\cong G$（一般情形将在第七章中给出）.

例如，我们已经得到$\Gamma_{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}$，$\Gamma_{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{Z}$，$\Gamma_{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{T}$．所以

$$\Gamma_{\Gamma_{\boldsymbol{R}}}=\Gamma_{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R},$$
$$\Gamma_{\Gamma_{\boldsymbol{T}}}=\Gamma_{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{T},$$
$$\Gamma_{\Gamma_{\boldsymbol{Z}}}=\Gamma_{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{Z}.$$

§3.9 向量值积分与解析函数

本节讨论在Banach空间B上取值的向量值函数的积分与微分。若X是局部紧的Hausdorff空间，μ是X上正有限的正则Borel测度。f是$X\to B$有界连续的向量值函数，那么应如何定义积分$\int_X f\mathrm{d}\mu$。自然$\int_X f\mathrm{d}\mu$应是B中的元素，因此问题是如何选取$u\in B$使$u=\int_X f\mathrm{d}\mu$。

我们知道，若f是$X\to\boldsymbol{C}$有界连续函数，则$\int_X f d\mu$就是复连续函数在X上的积分。问题是如何利用复连续函数的积分概念定义向量值函数的积分。

若φ是B上的有界线性泛函，$\varphi\in B^*$，则$\varphi\circ f$是$X\to\boldsymbol{C}$有界连续函数，于是$\int_X\varphi\circ f\mathrm{d}\mu$成为复函数的积分，是有确定意义的．又由Hahn-Banach定理知，B中的元素u被B上有界线性泛函空间B^*完全决定，因此，若知道了所有B^*中的有界线性泛函φ在u上的值$\varphi(u)$，则u就完全确定了。根据以上讨论，问题成为如何找到B中的元素u，使得对B^*中的一切有界线性泛函φ在u上的值，

$$\varphi(u)=\int_X\varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

恒成立。这样的u若存在，则可以定义向量值函数的积分。

定义 7. 若X是局部紧Hausdorff空间，μ是X上正有限的正则Borel测度。B是Banach空间，f是$X\to B$有界连续向量值函数。若存在一个向量$u\in B$，使得

$$\varphi(u)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

对一切$\varphi\in B^*$成立，则定义向量值积分$\int_X f\mathrm{d}\mu=u$。

定理20. 若X是局部紧Hausdorff空间，具有正有限正则Borel测度，B是Banach空间，f是$X\to B$有界连续函数，则在B中存在唯一元素u，使得对B^*中一切有界线性泛函φ，

$$\varphi(u)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

恒成立，

证 $\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$的值与$\varphi$的选取有关，它确定了一个$B^*\to C$的映射$w$:

$$w(\varphi)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu.$$

显然w是线性的。

$$|w(\varphi)|\leqslant\int_X |\varphi\circ f|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X \|\varphi\|\ \|f(x)\|\,\mathrm{d}\mu$$

$$=\|\varphi\|\ \|f(x)\|\ \|\mu\|,$$

其中$\|\mu\|=\mu(X)$. 由于φ、f有界，$\mu(X)$是有限的。所以w是有界的。

为求u，我们设法在B中找到元素列$\{u_n\}$，使$\varphi(u_n)$逼近$w(\varphi)$。μ是X上正则Borel测度，故任意给定$\varepsilon>0$，必可找到紧集合$K\subset X$，使$\mu(X\setminus K)<\varepsilon$。$K$是紧集合，$f$连续，所以$f(K)$也是紧集合. 以$f(K)$中每一点为中心，$\frac{\varepsilon}{2}$为半径作开球，得$f(K)$的一个开覆盖，由$f(K)$的紧性知，必有有限多个开球覆盖$f(K)$。设以$a_1,a_2,\cdots,a_n$为中心的$n$个开球覆盖$f(K)$。从$a_1$为中心的开球中

去掉属于a_1为中心的开球的部分，从a_3为中心的开球中去掉属于a_1或a_2为中心的开球的部分。依次做下去，即可去掉这些开球的重复部分。得到$f(K)$的有限开覆盖$V_1, V_2, \cdots, V_n$，两两不相交，且每一开集V_i上任意两点的距离小于ε。于是得到K上一组互不相交的非空Borel集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = K$,

(2) 若$x, y \in A_i$，则$\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

从$f(A_i)$中任取$b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则当$x \in A_i$时必有

$$\| f(x) - b_i \| < \varepsilon.$$

令

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) b_i,$$

则$u \in B$. 任取$\varphi \in B^*$，考虑

$$w(\varphi) - \varphi(u) = w(\varphi) - \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) b_i \right),$$

因为

$$w(\varphi) = \int_K \varphi \circ f \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu,$$

且φ为线性的，所以

$$\begin{aligned} w(\varphi) - \varphi(u) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu - \varphi(\mu(A_i) b_i) \right] + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} (\varphi \circ f - \varphi(b_i)) \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A} \varphi(f(x) - b_i) \mathrm{d}\mu(x) + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f \mathrm{d}\mu。 \end{aligned}$$

又 $|\varphi(f(x) - b_i)| \leqslant \| \varphi \| \, \| f(x) - b_i \| \leqslant \| \varphi \| \varepsilon$, $\forall x \in A_i$,

所以 $|w(\varphi)-\varphi(u)| \leqslant \|\varphi\| \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} d\mu(x)+$

$\|\varphi\| \|f\| \int_{X \setminus K} d\mu(x)=\|\varphi\| \varepsilon\mu(K)+\|\varphi\| \|f\| \mu(X \setminus K)<$

$\|\varphi\|(\|\mu\|+\|f\|)\varepsilon$.

由此知，任给 $\varepsilon>0$，按以上方法可以找到一个$u \in B$，使上式成立。又$\|\mu\|$，$\|f\|$是有限的。对于给定的整数n，可以取ε，使

$$(\|\mu\|+\|f\|)\varepsilon<\frac{1}{n}.$$

则对于$n=1,2,\cdots$，必有$u_n \in B$，使得对一切$\varphi \in B^*$，不等式

$$|w(\varphi)-\varphi(u_n)|<\|\varphi\| \frac{1}{n}$$

恒成立。因此，对于B^*中的一切φ恒有

$$|\varphi(u_n-u_m)|=|\varphi(u_n)-\varphi(u_m)|<\|\varphi\|\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).$$

根据Hahn-Banach定理得

$$\|u_n-u_m\|<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

所以$\{u_n\}$是Cauchy序列，故存在$u \in B$使得

$$\lim_{n \to \infty} u_n=u.$$

又 $|w(\varphi)-\varphi(u)| \leqslant |w(\varphi)-\varphi(u_n)|+|\varphi(u_n)-\varphi(u)|$

$$<\|\varphi\|\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{m}\right),$$

对$n,m=1,2,\cdots$恒成立。所以$w(\varphi)=\varphi(u)$。即对一切$\varphi \in B^*$，在B中存在u，使

$$\varphi(u)=\int_X \varphi \circ f d\mu$$

恒成立。

u 的唯一性是显然的。因若存在$v\in B$使

$$\varphi(v)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

对一切$\varphi\in B^*$成立，则由于积分$\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$是确定的，故对一切$\varphi\in B^*$，恒有$\varphi(u)=\varphi(v)$。故$u=v$，证毕。

这个定理说明定义 7 是有确切意义的，可以写成

$$\varphi\left(\int_X f\ \mathrm{d}\mu\right)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu;\qquad \forall\varphi\in B^*.$$

以上讨论中假定μ是正测度，实际上若以$M(X)$表示一切有界复测度空间，取$\mu\in M(X)$。以上讨论仍可同样进行，此时只需取$\|\mu\|=|\mu|(X)$，而

$$|\mu|(X)=\sup\{|\mu(k)|\ |k\subset X,\ k\text{ 是紧集}\}.$$

定理20可改写成如下定理。

定理21. 设X是局部紧的Hausdorff空间，$\mu\in M(X)$是正则Borel测度，B是Banach空间，f是$X\to B$有界连续函数，则在B中存在唯一的元素$\int_X f\mathrm{d}\mu$，使得对一切$\varphi\in B^*$，等式

$$\varphi\left(\int_X f\ \mathrm{d}\mu\right)=\int_X \varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

恒成立，且

$$\left\|\int_X f\ \mathrm{d}\mu\right\|\leqslant\int_X \|f(x)\|\ \mathrm{d}|\mu|(x).$$

还可以将以上向量值积分概念推广，考虑更一般的情形。若f是$X\to B$有界连续映射，ψ是$B\to E$有界连续映射，E也是Banach空间，则$\psi\circ f$是$x\to E$有界连续函数，根据以上讨论知$\int_X \psi\circ f\mathrm{d}\mu$存在且为$E$中的元素，$\int_X f\mathrm{d}\mu$存在且为$B$中的元素，自然$\psi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)$有意义，那么等式

$$\int_X \psi\circ f\,d\mu=\psi\left(\int_X f d\mu\right)$$

是否成立？答案是肯定的。

事实上，若$\zeta\in E^*$，则由定理20知

$$\zeta\left(\int_X \psi\circ f d\mu\right)=\int_X \zeta\circ\psi\circ f d\mu,\qquad \forall\,\zeta\in E^*,$$

又 $\int_X f d\mu\in B$，$\psi\left(\int_X f\,d\mu\right)\in E$　$\zeta\left(\psi\int_X f\,d\mu\right)\in C$，且

$$\zeta(\psi(\int_X f d\mu))=(\zeta\circ\psi)\int_X f d\mu,$$

因为$\zeta\circ\psi\in B^*$，由定理20知

$$(\zeta\circ\psi)\int_X f d\mu=\int_X \zeta\circ\psi\circ f d\mu.$$

所以得

$$\zeta\left(\int_X \psi\circ f d\mu\right)=\zeta\left(\psi\left(\int_X f\,d\mu\right)\right),$$

即
$$\int_X \psi\circ f\,d\mu=\psi\int_X f\,d\mu.$$

特别，若B是一个Banach代数，且$E=B$，若取$\psi(y)=sy$，其中$s\in B$，则有$\psi\circ f=sf(x)$，于是得

$$\int_X s\ f(x)d\mu=s\int_X f(x)d\mu,$$

也就是说，向量值函数乘以$s\in B$的积分，可将s提到积分号外。同理，若取$\psi(y)=ys$，则有

$$\int_X f(x)sd\mu=\left(\int_X f(x)d\mu\right)s.$$

下面再来研究向量值函数的解析性。

定义 8 设Ω是复数域$\boldsymbol{C}$上的开集，B是Banach空间．f是Ω到B上的映射。

（1）若对于一切$z\in\Omega$，$\lim\limits_{w\to z}\dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$存在，则称函数$f$在$\Omega$内是强解析的。

（2）若对于一切$\Lambda\in B^*$，Λf在Ω内是解析的，则称f是弱解析的．

由关系式

$$\frac{\Lambda f(w)-\Lambda f(z)}{w-z}=\Lambda\left(\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\right),\qquad \forall\Lambda\in B^*$$

知，若f是强解析的，则f必为弱解析的，反之如何？有以下定理。

定理22 若f在Ω内是弱解析的，则f在Ω内必为强解析的。

证 首先说明若f在Ω内是弱解析的，则f在Ω内必连续．不妨设$0\in\Omega$，只需证明$f(z)$在0点连续。

因为Ω是开集，故存在$r>0$使得

$$D_{2r}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|\leqslant 2r\}\subset\Omega.$$

记

$$\Gamma:\ |z|=2r.$$

取定$\Lambda\in B^*$，Λf是解析的，由Cauchy积分公式知，当$0<|z|<2r$有

$$\frac{\Lambda f(z)-\Lambda f(0)}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Lambda f(\beta)}{\beta(\beta-z)}d\beta.$$

令$M(\Lambda)=\sup\{|\Lambda f(z)|\ z\in D_{2r}\}$，当$0<z<|r|$，$\beta\in\Gamma$有

$$|\beta-z|\geqslant|\beta|-|z|\geqslant 2r-r=r,$$

故
$$\left|\frac{\Lambda f(z)-\Lambda f(0)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\ \frac{M(\Lambda)}{2r\cdot r}4\pi r=\frac{M(\Lambda)}{r}$$

即

$$\left|\Lambda\left(\frac{f(z)-f(0)}{z}\right)\right|\leqslant\frac{M(\Lambda)}{r}.$$

利用Hahn-Banach定理知，$\frac{f(z)-f(0)}{z}$作为B^{**}中的元素作用在$\Lambda\in B^*$上是有界的，其中$0<|z|<r$。由Banach-Steinhaus定理知

$$\left\{\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right\|\,\middle|\,0<|z|<r\right\}$$

是一致有界的。故有

$$\lim_{z\to 0}\|f(z)-f(0)\|=0;$$

即

$$\lim_{z\to 0}f(z)=f(0).$$

所以$f(z)$在$z=0$是连续的。同理可证$f(z)$在任意$z\in\Omega$连续。

由于$f(z)$是$C\to B$连续函数，Γ是紧集合，根据向量值积分定义有

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\beta)}{\beta(\beta-z)}\mathrm{d}\beta,$$

现在证明 $$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\beta)}{\beta^2}\mathrm{d}\beta.$$

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\beta)}{\beta^2}\mathrm{d}\beta\right\|$$

$$=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{z\,f(\beta)}{\beta^2(\beta-z)}\mathrm{d}\beta\right\|$$

$$\leqslant\frac{|z|}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\|f\|_\infty}{|\beta^2|\;|\beta-z|}\mathrm{d}\beta,$$

其中 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{\beta\in\Gamma}\|f(\beta)\|$，又当 $0<|z|<r$ 有 $|\beta-z|\geqslant r$。

所以

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\beta)}{\beta^2}\mathrm{d}\beta\right\|\leqslant\frac{|z|}{2r^2}\|f\|_\infty.$$

由此知

$$f'(0)=\lim_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{f(\beta)}{\beta^2}\mathrm{d}\beta.$$

同理对任意$z\in\Omega$可以证明$f'(z)$存在。定理得证。

再考虑如何定义Banach代数A上的向量值函数。设A具有单元e，$x\in A$，如何去定义$f(x)$？若$f(\lambda)$是一个具有复系数α_i的多项式

$$f(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\cdots+\alpha_k\lambda^k,\quad \lambda\in C.$$

自然可以定义$f(x)$如下：

$$f(x)=\alpha_0e+\alpha_1x+\cdots+\alpha_kx^k,\quad x\in A.$$

显然$f(x)\in A$。即f是$A\to A$的向量值函数。若

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k,\ \lambda\in C$$

是C上的整函数，自然可以定义

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k,\ x\in A.$$

例如定义 $$\exp(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k,\quad x\in A.$$

另外，考虑半纯函数

$$f(\lambda)=\frac{1}{\alpha-\lambda},\qquad \lambda\in C$$

α是它的一个极点。这时按以下方法定义$f(x)$。

若$x\in A$，但$\sigma(x)\not\ni\alpha$，则$\alpha e-x$可逆，于是定义

$$f(x)=(\alpha e-x)^{-1}.$$

自然由此可定义有理函数，更进一步考虑如何定义一般的向量值全纯函数。在复变函数中，Cauchy积分公式可以很好地描述解析函数，因此我们试图利用Cauchy积分公式将一般的解析函数$f(\lambda)$：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$推广到向量值函数$f(x)$：$A\to A$。

定义 9 设Ω是$\boldsymbol{C}$上开集，K是Ω内的紧子集，Γ是Ω内有限个定向的线段，且每个线段都不与K相交，若Γ满足

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\lambda-z}d\lambda=\begin{cases}1, & \text{当 } z\in K,\\ 0, & \text{当 } z\notin K,\end{cases}$$

则称Γ是Ω中环绕K的围道。等式左方的积分称为点$Z\in\boldsymbol{C}$关于闭路Γ的指标，记作$\mathrm{Ind}_\Gamma(Z)$。

引理 1 设A是具有单元e的Banach代数，$x\in A$，$\alpha\in\boldsymbol{C}$，$\alpha\notin\sigma(x)$，$\Omega=\boldsymbol{C}-\{\alpha\}$。$\Gamma$是$\Omega$内环绕$\sigma(x)$的围道，则

$$(\alpha e-x)^n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\alpha-\lambda)^n(\lambda e-x)^{-1}d\lambda,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

证明 用归纳法，先证当$n=0$时引理成立，即证

$$e=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

因为$\sigma(x)$是紧集合，且对于一切$\mu\in\sigma(x)$有$|\mu|\leqslant\|x\|$，令$r>\|x\|$，记Γ_r为以O为中心r为半径的圆周，则$\sigma(x)$含于Γ_r所围成的圆内。

在Γ_r上$\|\lambda^{-1}x\|=|\lambda^{-1}|\ \|x\|=\frac{\|x\|}{r}<1$，所以

$$(e-\lambda^{-1}x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}x)^n.$$

由此得

$$(\lambda e-x)^{-1}=\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}x^n.$$

逐项积分，且利用关系式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\lambda^{-n-1}x^n d\lambda=\begin{cases}0, & n\neq 0;\\ e, & n=0,\end{cases}$$

得
$$e=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

将Γ_r换成Γ，上式仍成立。故 $n=0$ 时引理得证。

又令
$$y_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

当$\lambda\notin\sigma(x)$，有

$$(\lambda e-x)^{-1}=(\alpha e-x)^{-1}+(\alpha-\lambda)(\alpha e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1},$$

$$y_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n(\alpha e-x)^{-1}d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n+1}(\alpha e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda,$$

由于 $\alpha\notin\Omega$， 故$\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n d\lambda=0$。即

$$\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n(\alpha e-x)^{-1}d\lambda=0,$$

所以

$$y_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n+1}(\alpha e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda$$

$$=(\alpha e-x)^{-1}y_{n+1},$$

即
$$y_{n+1}=(\alpha e-x)y_n,$$

又$y_0=e$，得$y_n=(\alpha e-x)^n$，$n=0$，±1，±2，…。引理得证。

利用这个引理知，若$P(\lambda)$是$\boldsymbol{C}$上的多项式，则在Banach 代数$\boldsymbol{A}$上可以定义$P(x)$如下：

$$P(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

即$P(x)$由以上Cauchy积分公式给出。

又引理1对$n<0$也成立，故若$R(\lambda)$为$\boldsymbol{C}$上的有理函数，具有极点α_1，α_2，…，α_k。开集Ω不包含α_1，α_2，…，α_k，则$R(\lambda)$在Ω内解析，且$R(\lambda)$可表示成

$$R(\lambda)=P(\lambda)+\sum_{m,l}C_{m,l}(\alpha_m-\lambda)^{-l},$$

其中$P(\lambda)$是多项式。此时可对$R(\lambda)$中每一项应用引理，从而得到以下定理。

定理23 设

$$R(\lambda)=P(\lambda)+\sum_{m,l}C_{m,l}(\alpha_m-\lambda)^{-l}$$

是有理函数，具有极点α_m。$P(\lambda)$是多项式。若$x\in A$，$\sigma(x)$不含$R(\lambda)$的极点α_m，定义

$$R(x)=P(x)+\sum_{m,l}C_{m,l}(\alpha_m e-x)^{-l},$$

若Ω是$\boldsymbol{C}$上的开集，包含$\sigma(x)$，且在Ω内R是解析的，若Γ是Ω内环绕$\sigma(x)$的围道。则

$$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda.$$

定理说明有理函数也可由Cauchy积分公式给出，由此可以用Cauchy积分公式定义一般向量值函数。

定义10 设A是Banach代数，具有单元e，Ω是复数域$\boldsymbol{C}$中的开集，f：$\Omega\to\boldsymbol{C}$是解析函数，$x\in A$，$\sigma(x)\subset\Omega$，则定义

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda,$$

其中Γ是Ω中环绕$\sigma(x)$的围道。

注意(1)Γ与$\sigma(x)$不相交，$f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}$是$A$中一个连续的向量值函数，以上定义中的积分是一个向量值积分，$\tilde{f}(x)$是一个

向量值函数，也称为A—值函数.

（2）$\widetilde{f}(x)$与Γ的选取无关. 由向量值积分定义知，任取A上一个有界线性泛函，作用在定义$\widetilde{f}(x)$的等式两方，则右方得一个C上的复函数的积分，由复函数积分的Cauchy定理知，若取Γ'是另一个环绕$\sigma(x)$且含于Ω内的围道，则积分值不变.

（3）若$f(\lambda)$是多项式或有理函数，则$\widetilde{f}(x)=f(x)$.

（4）$\widetilde{f}(x)$的定义域是$A_\Omega=\{x\in A\,|\sigma(x)\subset\Omega\}$.

定理24 若A是有单元的Banach代数，Ω是C中开集合，则$A_\Omega=\{x\in A|\ \sigma(x)\subset\Omega\}$是$A$中的开集合.

证 为证A_Ω是开集，只需证明任取$x\in A_\Omega$，必存在$\delta>0$，使得对一切满足$\|y\|<\delta$的y，都有$x+y\in A_\Omega$.

因为$\sigma(x)$是紧集，故λ充分大时，$(\lambda e-x)^{-1}$存在且为λ的连续函数. 又$\lambda\to\infty$时$\|(\lambda e-x)^{-1}\|$趋于0，故存在$M<\infty$使得当$\lambda\notin\Omega$时，

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\|<M.$$

取 $\delta=\frac{1}{M}$，若$\|y\|<\delta$，$\alpha\notin\Omega$，则

$$\alpha e-(x+y)=(\alpha e-x)[e-(\alpha e-x)^{-1}y],$$

又$\|(\alpha e-x)^{-1}\|<M$，$\|y\|<\frac{1}{M}$，故$\|(\alpha e-x)^{-1}y\|<1$，所以$\{e-(\alpha e-x)^{-1}y\}$可逆，又$(\alpha e-x)$可逆，所以$\{\alpha e-(x+y)\}$可逆，即$\alpha\notin\sigma(x+y)$.

以上推出，若$\alpha\notin\Omega$，则$\alpha\notin\sigma(x+y)$. 所以若$\alpha\in\sigma(x+y)$，则$\alpha\in\Omega$. 故$\sigma(x+y)\subset\Omega$. 即$x+y\in A_\Omega$. 定理得证.

我们看到，$\widetilde{f}(x)$是A中开集A_Ω到A的一个映射，它是由C中开集合Ω到C的一个函数$f(\lambda)$所定义的. 又$f(\lambda)$是解析函数，自然可以研究$\widetilde{f}(x)$的微分和积分.

（5）若取$x=\alpha e$，$\alpha\in\Omega$，则$\sigma(x)=\{\alpha\}\subset\Omega$，于是有

$$\tilde{f}(ae)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda-a)^{-1}e\,d\lambda=f(a)e\,.$$

注意到$ae\in A_\Omega\Longleftrightarrow a\in\Omega$.若将$\mathbf{C}$看成$A$的子集，即将$\mathbf{C}$看成$\mathbf{C}e$，则上式说明，$\tilde{f}$可以看成是$f$由$\Omega e$到$A_\Omega$上的一个开拓。

若开集$\Omega\subset\mathbf{C}$。引入以下记号：

$$H(\Omega)=\{f:\ \Omega\to\mathbf{C}\mid f\text{是解析函数}\},$$

$$\tilde{H}(A_\Omega)=\{\tilde{f}\mid f\in H(\Omega)\}.$$

$f\to\tilde{f}$就是$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_\Omega)$的一个映射.下面来证明$f\to\tilde{f}$是$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_\Omega)$上的代数同构。

定理25 若$u(\lambda)=\lambda$，则$\tilde{u}(x)=x$；若$v(\lambda)=1$，则$\tilde{v}(x)=e$。

证 由定义可知结论显然成立。

定理26 $f\to\tilde{f}$是$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_\Omega)$的满射，且为线性的一一的。

证 由$\tilde{H}(A_\Omega)$的定义，显然$f\to\tilde{f}$是$H(\Omega)$到$\tilde{H}(A_\Omega)$的满射。又因$\tilde{f}$是由积分定义的，显然有

$$(\widetilde{\alpha f+\beta g})=\alpha\tilde{f}+\beta\tilde{g},\qquad \alpha,\ \beta\in\mathbf{C}.$$

为证明$f\to\tilde{f}$是一一的，只需证明若$\tilde{f}=0$，则$f=0$。若对于一切$x\in A_\Omega$有$\tilde{f}(x)=0$，取$x=ae$，得$\tilde{f}(ae)=f(a)e=0$对一切$a\in\Omega$成立，所以$f(a)=0$。即$f=0$。

这个定理说明$H(\Omega)$和$\tilde{H}(A_\Omega)$作为线性空间，它们是同构的。

定理27 若$f_n\in H(\Omega)(n=1,2,\cdots)$，且在$\Omega$的紧子集上$f_n$一致地收敛于$f$，则

$$\tilde{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde{f}_n(x),\qquad (x\in A_\Omega).$$

证 对于$x\in A_\Omega$，对于一切$\tilde{f}_n(x)$选取同一个围道Γ，则有

$$\widetilde{f}_n(x)-\widetilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(f_n(\lambda)-f(\lambda))(\lambda e-x)^{-1}\mathrm{d}\lambda.$$

由于$\|(\lambda e-x)^{-1}\|$在Γ上有界，且$f_n(\lambda)$在紧集Γ上一致收敛于$f(\lambda)$，即$|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\to 0$当$n\to\infty$，所以

$$\|\widetilde{f}_n(x)-\widetilde{f}(x)\|\longrightarrow 0,\ 当\ n\to\infty$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x)=\widetilde{f}(x).$$

定理28 （Runge定理）若Ω是$\boldsymbol{C}$中开集，$f:\Omega\to\boldsymbol{C}$是解析函数.设$A\subset\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\setminus\Omega$，且$A$在$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\setminus\Omega$的每一个连通分支中都有一个点，则存在有理函数$R_n(\lambda)$，$R_n(\lambda)$仅在$A$中有极点，且在$\Omega$紧子集上一致收敛于$f$.

特别地，若$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}\setminus\Omega$是连通的，则可取$R_n(\lambda)$为多项式，即取$A=\{\infty\}$.

证明从略.

定理29 $\widetilde{H}(A_\Omega)$是一个复值代数，$f\to\widetilde{f}$是$H(\Omega)$到$\widetilde{H}(A_\Omega)$上的代数同构.

证 由定理26知，只需证明$f\to\widetilde{f}$保持乘法，即若f、$g\in H(\Omega)$，则$\widetilde{fg}=\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}$.

若f，g是有理函数，则$h=f\cdot g$也是有理函数，于是$\widetilde{f}(x)=f(x)$，$\widetilde{g}(x)=g(x)$，$\widetilde{h}(x)=h(x)(x\in A_\Omega)$. 故由$h=fg$得$\widetilde{h}=\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}$

对于一般情形，若$h=f\cdot g$，由Runge定理知，存在着有理函数f_n，在Ω的紧子集上一致收敛于f，存在着有理函数g_n，在Ω的紧子集上一致收敛于g. 故f_ng_n在Ω的紧子集上一致收敛于h，且f_ng_n为有理函数.

由定理27知

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}_n(x)=\widetilde{f}(x),\ \lim_{n\to\infty}\widetilde{g}_n(x)=\widetilde{g}(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n \widetilde{\cdot} g_n = \widetilde{h}(x).$$

又
$$f_n \widetilde{\cdot} g_n = \widetilde{f}_n \cdot \widetilde{g}_n,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(x)\widetilde{g}_n(x) = \widetilde{h}(x).$$

即
$$\widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x).$$

这说明$\widetilde{H}(A_\Omega)$保持乘法，是一个复代数. 定理得证.

注意到$H(\Omega)$是可交换的，故$\widetilde{H}(A_\Omega)$也是可交换的.

定理30 设$x \in A_\Omega$，$f \in H(\Omega)$. 则

(1) $\widetilde{f}(x)$可逆当且仅当$f(\sigma(x))$不包含0点，即$f(\lambda) \neq 0$，$\forall \lambda \in \sigma(x)$.

(2) $\sigma(\widetilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$（称为谱映射定理）.

证 (1) $\sigma(x)$是紧集，f在紧集$\sigma(x)$上不为零，故f在包含$\sigma(x)$的开集$\Omega_1 \subset \Omega$上也不为零. 所以在开集Ω_1上，$\frac{1}{f}$是解析的. 由定理25知

$$\widetilde{f}(x) \cdot \widetilde{\frac{1}{f}}(x) = f \widetilde{\cdot} \frac{1}{f}(x) = \widetilde{1}(x) = e.$$

所以$\widetilde{f}(x)$是可逆的.

反之，若有$\alpha \in \sigma(x)$使$f(\alpha) = 0$，则存在$g \in H(\Omega)$使得$f(\lambda) = (\lambda - \alpha)g(\lambda)$，于是

$$\widetilde{f}(x) = (x - \alpha e)\widetilde{g}(x).$$

因为$(x - \alpha e)$不可逆，所以$\widetilde{f}(x)$不可逆，故若$\widetilde{f}(x)$可逆，必有$f(\sigma(x)) \not\ni 0$.

(2) $\alpha \in \sigma(\widetilde{f}(x)) \Longleftrightarrow \widetilde{f}(x) - \alpha e$不可逆$\overset{由(1)}{\Longleftrightarrow}$存在$\lambda \in \sigma(x)$使$f(\lambda) - \alpha = 0$，即存在$\alpha \in \sigma(x)$使$f(\lambda) = \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in f(\sigma(x))$. 定理得证.

定理31 设$x\in A_\Omega$，$f\in H(\Omega)$，Ω_1是包含$f(\sigma(x))$的开集，$g\in H(\Omega_1)$。又$h(\lambda)=g(f(\lambda))$为由Ω_0到$\mathbf{C}$的映射，其中$\Omega_0=\{\lambda\in\Omega|\ f(\lambda)\in\Omega_1\}$。则$\tilde{f}(x)\in A_{\Omega_1}$且$\tilde{h}(x)=\tilde{g}(\tilde{f}(x))$。即若$h=g\circ f$，则$\tilde{h}=\tilde{g}\circ\tilde{f}$。

证 首先指出$\tilde{h}(x)$是有意义的。因为$\sigma(\tilde{f}(x))=f(\sigma(x))$，而$f(\sigma(x))\subset\Omega_1$，又$g\in H(\Omega_1)$，故$\tilde{g}(\tilde{f}(x))$有意义。

在Ω_1中固定一条环绕$\sigma(\tilde{f}(x))$的围道Γ_1，于是有

$$\tilde{g}(\tilde{f}(x))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}g(\lambda_1)(\lambda_1 e-\tilde{f}(x))^{-1}d\lambda_1\text{。}$$

在Ω_0中取充分小的开集w，使$\sigma(x)\subset w\subset\Omega_0$且$f(w)$仍落在$\Gamma_1$以内，即$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(f(\lambda))=1$对一切$\lambda\in w$成立。在$w$中取定一条环绕$\sigma(x)$的围道$\Gamma_0$。在$w$中若$\lambda_1\in\Gamma_1$，则$k(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda_1-f(\lambda)}$是解析的，即$1/(\lambda_1-f(\lambda))\in H(w)$。故

$$\tilde{k}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}k(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda\text{。}$$

又 $k(\lambda)(\lambda_1-f(\lambda))=1$，所以

$$\tilde{k}(x)(\lambda_1 e-\tilde{f}(x))=e\text{。}$$

故

$$\tilde{k}(x)=(\lambda_1 e-\tilde{f}(x))^{-1}\text{。}$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{f}(x))&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}g(\lambda_1)[\lambda_1 e-\tilde{f}(x)]^{-1}d\lambda_1\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}g(\lambda_1)(\lambda_1\\&\quad-f(\lambda))^{-1}d\lambda_1(\lambda e-x)^{-1}d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}g(f(\lambda))(\lambda e-x)^{-1}d\lambda\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

$$= \tilde{h}(x).$$

定理得证。

§3.10 Stone-Weierstrass定理

在实函数中，著名的Weierstrass定理指出，区间$[0,1]$上的连续函数可以用多项式一致地逼近。即对于$f \in C([0,1])$，任给$\varepsilon > 0$，存在多项式$P(x)$，使得$\| f - P \|_\infty < \varepsilon$。

Stone 利用连续函数的乘法结构，将Weierstrass定理推广到更一般的情形。

定理32 设X是紧空间，$C_R(X)$是X上所有实值连续函数构成的空间，B是$C_R(X)$上的子代数，满足

(1) B可分离点，即指任给$x, y \in X$，$x \neq y$，则存在$g \in B$使得$g(x) \neq g(y)$。

(2) B不在任何点$x \in X$消失为0。这是说任给$x \in X$，存在$g \in B$使$g(x) \neq 0$。

则$ClB = C_R(X)$。其中ClB表示B的闭包$\overline{B}$。

证 证明分以下几个步骤：

1) 首先证明任给x，$y \in X$，c_1，$c_2 \in \boldsymbol{R}$，必存在$f(t) \in B$使得$f(x) = c_1$，$f(y) = c_2$。

由B所满足的条件(1)、(2)知，存在$g(t)$、$h(t)$、$k(t) \in B$，使得$g(x) \neq g(y)$，$h(x) \neq 0$，$k(y) \neq 0$。令

$$u(t) = (g(t) - g(x))k(t).$$

因为B是子代数，故$u(t) \in B$。再令

$$v(t) = (g(t) - g(y))h(t),$$

则$v(t) \in B$。容易看出

$$u(x) = 0, \quad u(y) \neq 0, \quad v(x) \neq 0, \quad v(y) = 0.$$

令

$$f(t)=c_1\frac{v(t)}{v(x)}+c_2\frac{u(t)}{u(y)},$$

则$f(t)$即为所求。

2） 再证明Weierstrass定理的一个特例。

引理 2 若$-1\leqslant x\leqslant 1$，则存在不含常数项的多项式$P_n(x)$，使得当$n\to\infty$时，$\|P_n(x)-|x|\|_\infty\to 0$。

证 令 $P_0(x)=0$，$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$，

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

于是

$$|x|-P_{n+1}(x)=(|x|-P_n(x))\left(1-\frac{|x|+P_n(x)}{2}\right). \qquad (8)$$

用数学归纳法容易证明

$$0\leqslant P_0(x)\leqslant P_1(x)\leqslant\cdots\leqslant P_n(x)\leqslant\cdots\leqslant|x|.$$

事实上显然$P_0(x)\leqslant P_1(x)\leqslant|x|$. 假设$P_n(x)\leqslant|x|$. 则由$P_{n+1}(x)$的定义知

$$P_{n+1}(x)-P_n(x)=\frac{x^2-P_n^2(x)}{2}\geqslant 0.$$

另外由(8)式知$|x|-P_{n+1}(x)\geqslant 0$。于是得

$$P_n(x)\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant|x|.$$

再用数学归纳法证明

$$|x|-P_n(x)\leqslant|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^n<\frac{2}{n+1}. \qquad (9)$$

显然$|x|-P_0(x)=|x|$。即$n=0$时上式成立。若

$$|x|-P_n(x)\leqslant|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^n$$

成立。由(8)式得

$$|x|-P_{n+1}(x)\leqslant|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^{n}\left(1-\frac{|x|+P_n(x)}{2}\right)$$

$$\leqslant|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}.$$

再求函数 $|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^n$ 的极值得

$$|x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^n\leqslant\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<\frac{2}{n+1}.$$

由(9)式知，当 $n\to\infty$ 有

$$\|P_n(x)-|x|\|_\infty<\frac{2}{n+1}\longrightarrow 0.$$

3) 证明若 $f\in ClB$，则 $|f|\in ClB$。

不妨设 $\|f\|_\infty\leqslant 1$。由2)知，任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $\|P_n\circ f-|f|\|_\infty<\varepsilon$ 成立。又 P_n 不含常数项，B 是子代数，故 ClB 是子代数，$f\in Cl3$，所以 f 的多项式 $P_n\circ f\in ClB$。由此知$|f|\in Cl(ClB)=ClB$。

若 $\|f\|_\infty>1$，考虑 $g=\frac{f}{\|f\|_\infty}$，则 $\|g\|=1$。由 $g\in ClB$ 得

得$|f|\in ClB$。

4) 最后证明定理。

任给 a，$b\in\boldsymbol{R}$ 显然 $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$，

$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$。故若 f，$g\in ClB$。则

$$\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}\in ClB,$$

$$\min(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}\in ClB.$$

即ClB按实数的序作成一个格。

给定$f\in C_R(X)$，任给$\varepsilon>0$，取定一个$x\in X$，任取$y\in X$，由于$f(x)$、$f(y)\in \boldsymbol{R}$，利用1°中结论知，存在一个$g_y(t)\in ClB$，使得$g_y(x)=f(x)$，$g_y(y)=f(y)$.

又g_y-f是连续函数，且$(g_y-f)(y)=0$．故存在包含y的开集U_y，使得在U_y上有$g_y>f-\varepsilon$．对于每个$y\in X$，可以得到具有以上性质的开集$U_y\ni y$．故$\{U_y\}$形成X的一个开覆盖．又X是紧集，所以存在y_1，y_2，…，$y_n\in X$，使得

$$U_{y_1}\cup U_{y_2}\cup\cdots\cup U_{y_n}=X.$$

令$h_x=max\{g_{y_1}\cdots, g_{y_n}\}$，则$h_x\in ClB$．显然在$x$点$h_x(x)=f(x)$，且$h_x>f-\varepsilon$在X上恒成立。这是因为任取$t\in X$，则有某个$i$，使$t\in U_{y_i}$，所以$g_{y_i}(t)>f(t)-\varepsilon$．故$h_x(t)\geqslant g_{y_i}(t)>f(t)-\varepsilon$.

再变动$x\in X$．由于h_x-f是连续函数，且$(h_x-f)(x)=0$，故存在一个开集V_x包含x，使得在V_x上，$h_x<f+\varepsilon$成立。$\{V_x\}$形成X的一个开覆盖，故存在x_1，x_2，…，$x_m\in X$使得

$$U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\cdots\cup U_{x_m}=X.$$

令$k=\min\{hx_1,hx_2,\cdots,hx_m\}$，则$k\in ClB$．且$k<f+\varepsilon$．又由于每个$h_{x_i}$满足$h_{x_i}>f-\varepsilon$，所以$k>f-\varepsilon$．由此得到

$$\|f-k\|_\infty<\varepsilon.$$

所以$f\in Cl(ClB)=ClB$．故得

$$C_R(X)=ClB.$$

定理33（Stone-Weierstrass定理）．设X是紧空间，$C(X)$是X上连续函数空间，B是$C(X)$的一个子代数，满足

（1）B可分离点。

（2）B不在任何点消失为零.

（3）B是自共轭的，即若$f\in B$，则$\overline{f}\in B$.

则$ClB=C(X)$.

证 任取$f\in B$，由$f=u+iv$知

$$u=\frac{f+\overline{f}}{2}\in B,\qquad v=\frac{f-\overline{f}}{2i}\in B,$$

u、v为实值连续函数，现在证明u、v的集合构成$C_R(X)$的子代数，且满足条件(1)和(2).

由于B满足条件(1)，故任给x，$y\in X$，存在$f\in B$使得$f(x)=1$，$f(y)=0$，即$u(x)=1$，$u(y)=0$，这就是说集合$\{u\,|u=\mathrm{Re}f,\ f\in B\}$中存在着$u$使$u(x)\neq u(y)$．即分离点.

B满足条件(2)．任给$x\in X$，存在$f\in B$使$f(x)\neq 0$．我们可适当选取$\alpha\in\boldsymbol{C}$使$\alpha f(x)>0$．又$\alpha f=u_1+iv_1$，故$u_1(x)=\alpha f(x)\neq 0$.

以上证明了集合$\{u\,|u=\mathrm{Re}f,\ f\in B\}$作成$C_R(X)$的一个子代数满足条件(1)、(2)，由定理32知

$$Cl_{C_R(X)}\{u\,|u=\mathrm{Re}f,\ f\in B\}=C_R(X).$$

同理有

$$Cl_{C_R(X)}\{v\,|v=\mathrm{Im}f,\ f\in B\}=C_R(X).$$

所以 $$ClB=C(X).$$ 证毕.

例 $X=T$是紧集，考虑连续函数空间$C(T)$，

令 $$B=\left\{\sum_{n=0}^{k}C_n e^{in\theta}\,|\theta\in\boldsymbol{R},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\},$$

B是一个子代数，但显然$ClB\neq C(T)$．这是因为B不满足定理33中的条件(3)．若取

$$B=\left\{\sum_{n=-k}^{k}C_n e^{in\theta}|\ \theta\in\boldsymbol{R},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\},$$

则B是满足定理33中条件(1)、(2)、(3)的子代数，故$ClB=C(T)$.

很明显，实函数的Weierstrass定理是Stone-Weierstrass定理的一个特殊情形：因为所有多项式的集合，自然是$C_R(X)$的一个子代数且满足定理33中的条件(1)、(2).

第四章　Hilbert空间与B*—代数

在赋范线性空间中，范数相当于向量的模，若再引入内积概念—相当于向量的夹角概念，则可以研究向量的正交和投影概念。引入了内积的线性空间称为内积空间，完备的内积空间称为Hilbert空间。本章讨论Hilbert空间及其上的线性算子，由此引出对合概念。具有对合的Banach代数，B^*-代数有着许多重要特性。例如它的谱理论，Gelfand理论。本章讨论了它们的重要性质，证明了B^*-代数就是某个Hilbert空间上有界线性算子的闭 *-子代数。

§4.1　Hilbert空间的定义和性质

定义 1　若H是复数域$\boldsymbol{C}$上的线性空间，如果对于H中的任何两个向量x,y，都对应一个数$(x,y)\in\boldsymbol{C}$，也就是映射$H\times H\to\boldsymbol{C}$，满足

(1) $(x,\ y)=\overline{(y,\ x)}$，$\forall x,\ y\in H$，

(2) $(x+y,\ z)=(x,\ z)+(y,\ z)$，$\forall x,\ y,\ z\in H$，

(3) $(\alpha x,\ y)=\alpha(x,\ y)$，　$\alpha\in\boldsymbol{C}$，$x,\ y\in H$，

(4) $(x,\ x)\geqslant 0$，$\forall x\in H$，

(5) $(x,\ x)=0$，则$x=0$。

则称$(x,\ y)$为H中的内积，若只满足(1)→(4)，则称$(x,\ y)$为半内积。

由以上定义容易得出：

$$(x,\ \alpha y)=\overline{(\alpha y,\ x)}=\overline{\alpha}\,\overline{(y,\ x)}=\overline{\alpha}(x,\ y).$$

$$(x,\ y+z)=\overline{(y+z,\ x)}=\overline{(y,\ x)}+\overline{(z,\ x)}=(x,y)+(x,z).$$

$(0,\ y)=0$，$\forall y\in H$.

由

$$\begin{cases}(x+y,\ z)=(x,\ z)+(y,\ z),\\(\alpha x,\ z)=\alpha(x,\ z)\end{cases}$$

说明映射$x\to(x,\ z)$是线性的，而由

$$\begin{cases}(x,\ y+z)=(x,\ y)+(x,\ z),\\(x,\ \alpha y)=\overline{\alpha}(x,\ y)\end{cases}$$

知映射$y\to(x,\ y)$是共轭线性的。

当线性空间H上定义了内积，则称H为内积空间．若用内积定义范数

$$\|x\|=(x,\ x)^{\frac{1}{2}},\tag{1}$$

则H又是一个赋范线性空间。自然要证明由(1)式定义的$\|x\|$确实满足范数的条件，为此先证明一个不等式

$$|(x,\ y)|\leqslant(x,\ x)(y,\ y),\tag{2}$$

称为Schwarz不等式。事实上，对于任何数λ有

$$0\leqslant(x+\lambda y,x+\lambda y)=(x,x)+\lambda(y,x)+\overline{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y)$$

$$=(x,x)+2\mathrm{Re}\overline{\lambda}(x,\ y)+|\lambda|^2(y,\ y)$$

当$y=0$，显然(2)式成立，故不妨设$y\neq0$．取$\lambda=-\dfrac{(x\ y)}{(y,y)}$ 得

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,\ y)\geqslant0\,.$$

即得(2)式。

现只验证(1)式满足范数的三角不等式．因范数的其它要求可以由内积的性质直接得出。

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2.$$

由Schwarz不等式

$$|\mathrm{Re}(x,\ y)|\leqslant|(x,\ y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|,$$

代入上式得

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\ \|y\|+\|y\|^2$$
$$=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

所以 $$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

以下我们总是在内积空间H中引入由(1)式定义的范数，使H成为一个赋范线性空间，也就是距离空间。于是可以按此范数讨论H中的极限、收敛等概念

定义 2 完备的内积空间称为Hilbert空间。

定理 1 Hilbert空间H中的任何两个元素x，y必满足平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{3}$$

证 $\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2$,

$\|x-y\|^2=(x-y,x-y)=\|x\|^2-2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2$,

二式相加即得所证。

这个定理表明，一个Hilbert空间作为Banach空间，它的范数满足平行四边形公式。反之，并不是任何Banach空间都能引入内积使之成为Hilbert空间。有以下定理。

定理 2 若Banach空间B中的任何两个元素满足平行四边形公式(3)，则必可在B中定义内积，使B成为Hilbert空间。

证 在Banach空间B中，对x，$y\in B$，令

$$(x,\ y)=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2$$
$$-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\}, \tag{4}$$

可以验证这样定义的$(x,\ y)$满足内积的五个条件（读者自证）。由这个内积定义范数$|||x|||=(x,\ x)^{\frac{1}{2}}$.显然有$|||x|||=\|x\|$. 即由内积引出的范数就是原来的范数。

所以B是一个Hilbert空间。(4)称为极化公式。

利用定理1和定理2又可以给出Hilbert空间的另一种定义。

定义 3 若H是Banach空间且满足平行四边形定律

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2,\quad \forall x,y\in H$$

则称H是Hilbert空间。

例 1 n维复空间C^n：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，定义内积

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}, \quad x, y\in C^n$$

容易验证(x, y)满足内积的条件，故C^n为一个内积空间，且显然是完备的。因此C^n是一个Hilbert空间。

例 2 在$L^2(X, \mu)$空间中，定义内积

$$(f,g)=\int_X f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x, \qquad f, g\in L^2(x, \mu).$$

那末，$L^2(X, \mu)$是一个Hilbert空间。

例 1 实际上是例 2 的特殊情形。取

$$X=\{1, 2, \cdots, n\},$$

且取μ为计数测度，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

于是

$$L^2(X,\mu)=\left\{f: X\to C \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} |f(j)|^2<\infty\right\}$$

$$(f,g)=\int_X f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{n} f(j)\overline{g(j)}.$$

例 3 在$C([0, 1])$中定义内积

$$(f, g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t,$$

则$C([0, 1])$是一个内积空间，但不是Hilbert空间。因为$C([0,1])$不完备，它在L^2中稠密。

定理 3 设H是Hilbert空间，C是H中的非空闭凸集，则存在唯一的$x_0\in C$，使得

$$\|x_0\|\leqslant\|x\|$$

对一切$x\in C$成立。

证 令$\delta=\inf\{\|x\| \mid x\in C\}$，则存在$\{x_n\}\in C$使得$\|x_n\|\to\delta$.下面证明$\{x_n\}$是$H$中的Cauchy序列.

在平行四边形公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

中取$x=x_n$, $y=x_m$. 由于C是闭凸集，故$\frac{x_n+x_m}{2}\in C$。于是$\|x_n+x_m\|^2>4\delta^2$. 又

$$2\|x\|^2+2\|y\|^2=2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2\to4\delta^2$$

所以 $$\|x_n-x_m\|^2\to0.$$

即$\{x_n\}$是Cauchy序列，由于C是闭集，所以存在$x_o\in C$，使得$x_n\to x_o$。故

$$\|x_o\|\leqslant\delta.$$

再证明x_o的唯一性，从上面的证明看到，只要x_n的范数满足$\|x_n\|\to\delta$，则$\{x_n\}$必是Cauchy序列.

若$y_o\in C$，且$\|y_o\|=\delta$，则$\{x_o, y_o, x_o, y_o, \cdots\}$必是Cauchy序列，从而必收敛．所以$x_o=y_o$。证毕。

这个定理说明，Hilbert空间的非空闭凸集C中，有唯一点x_o，它到原点的距离最近.

§4.2 Hilbert空间的直交分解

定义4 设H是内积空间，x, $y\in H$，若$(x, y)=0$，则称x与y直交，记作$x\perp y$。

记$x^{\perp}=\{y\in H \mid x\perp y\}$，则$x^{\perp}$是$H$的闭线性子空间。

事实上，若y, $z\in x^{\perp}$，即$(y, x)=0$，$(z, x)=0$，则立即可得$(y+z, x)=0$．所以$y+z\in x^{\perp}$．又由$y\in x^{\perp}$得$(\alpha y, x)=$

$\alpha(y, x)=0$，故$\alpha y\in x^{\perp}$．这说明$x^{\perp}$是一个线性子空间．又若$y_n\in x^{\perp}$且$y_n\to y$，那末由内积的连续性，得

$$(y,x)=\lim_{n\to\infty}(y_n,x)=0,$$

所以$y\in x^{\perp}$．因此$x^{\perp}$是H的闭线性子空间．

若M是内积空间H的子集，记

$$M^{\perp}=\bigcap_{x\in M}x^{\perp},$$

即 $$y\in M^{\perp}\Longleftrightarrow y\perp x,\quad \forall x\in M.$$

由于$x^{\perp}$是H的闭线性子空间，$M^{\perp}$是这些闭子空间的交，故$M^{\perp}$仍为闭子空间．即有以下定理．

定理 4 设H是内积空间，$M\subset H$，那么$M^{\perp}$是H的闭线性子空间．

下面证明Hilbert空间的直交分解定理．

定理 5 设M是Hilbert空间H的闭子空间，则H的任一元素x可以唯一地表示为

$$x=Px+Qx,$$

其中$Px\in M$，$Qx\in M^{\perp}$，且$\|Qx\|\leqslant\|y+x\|$，$\forall y\in M$．

证 令 $\delta=\inf\{\|y+x\|\,|y\in M\}$，

由题设M是H的闭子空间，故M是非空闭凸集，所以$x+M=\{x+y|y\in M\}$也是非空闭凸集，由定理3知，存在唯一的$x_0\in x+M$，使得$\|x_0\|=\delta$．令

$$y_0=x-x_0,$$

则$y_0\in M$，即$x=x_0+y_0$．

下面证明$x_0\in M^{\perp}$．任取$y\in M$，$y\neq 0$，不妨设$\|y\|=1$．因为

$$x_0+\alpha y\in x+M,\quad \forall \alpha\in \boldsymbol{C}.$$

根据定理3有

$$\delta=\|x_0\|\leqslant\|x_0+\alpha y\|.$$

又对一切$\alpha\in C$，有

$$\|x_0+\alpha y\|^2=(x_0+\alpha y,\ x_0+\alpha y)=\|x_0\|^2+\alpha(y,\ x_0)$$

$$+\overline{\alpha}(x_0,\ y)+|\alpha|^2\|y\|^2\geqslant\|x_0\|^2,$$

则有 $\alpha(y,\ x_0)+\overline{\alpha}(x_0,y)+|\alpha|^2\|y\|^2\geqslant 0,\ \forall\alpha\in C.$

取$\alpha=-(x_0,\ y)$，代入上式得

$$-|(x_0,\ y)|^2-|(x_0,\ y)|^2+|(x_0,\ y)|^2\geqslant 0,$$

即 $$-|(x_0,\ y)|^2\geqslant 0.$$

所以 $$(x_0,\ y)=0.$$

由于y是M的任一元素，所以$x_0\in M^{\perp}$。至此证明了

$$x=Px+Qx,$$

其中$Px\in M$，$Qx\in M^{\perp}$，且$\|Qx\|\leqslant\|y+x\|$，$\forall y\in M$。

还需证明以上表示式的唯一性．为此，首先证明

$$M\cap M^{\perp}=\{0\}.$$

事实上，若$z\in M\cap M^{\perp}$，则$z\in M$，$z\in M^{\perp}$，故$(z,\ z)=0$，所以$z=0$。

若$x=Px+Qx$，且$x=w_1+w_2$，其中$w_1\in M$，$w_2\in M^{\perp}$。

则 $$Px-w_1=w_2-Qx.$$

由于$Px-w_1\in M$，$w_2-Qx\in M^{\perp}$，故必有

$$Px-w_1=0,\ w_2-Qx=0.$$

即$w_1=Px$，$w_2=Qx$．这就证明了上述直交分解是唯一的．定理得证。

这个定理说明，对于Hilbert空间H，若M为其闭子空间，则H可写成M与$M^{\perp}$的直和：

$$H=M\oplus M^{\perp},$$

称$M^{\perp}$为M的正交补空间。

显然，若$M\neq H$，则由$H=M\oplus M^{\perp}$知，$M^{\perp}\neq\{0\}$。另外，若M是H的闭子空间，则$(M^{\perp})^{\perp}=M$。

事实上，$(M^{\perp})^{\perp}$表示所有与$M^{\perp}$直交的向量，故$M\subset(M^{\perp})^{\perp}$。另

一方面

$$M \oplus M^{\perp} = H = M^{\perp} \oplus (M^{\perp})^{\perp},$$

所以$(M^{\perp})^{\perp} = M$.

自然还可以研究算子：

$$P: \quad H \to M, \quad x \to Px.$$

称P为H射影于闭子空间M的射影算子，则显然有以下性质：

（1）P是线性算子.

（2）P是幂等算子，$P^2 = P$.

同理可考虑算子Q，也具有同样的性质.

§4.3 Hilbert空间的同构

为研究Hilbert空间的同构性，先引入标准正交系的概念，它是数学分析中正交函数系概念的推广.

定义5 设H是Hilbert空间，若$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\} \subset H$满足

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$为$H$中的一个标准正交集合.

若$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$是$H$中的标准正交集合，$x \in H$且$x = \sum_{j=1}^{k} a_j u_j$，则容易得出$a_j = (x, u_j)$，于是有

$$x = \sum_{j=1}^{k} (x, u_j) u_j.$$

且

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{k} |(x, u_j)|^2. \tag{5}$$

特别地，$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$必是线性无关的. 事实上，若

$\sum_{j=1}^{k} a_j u_j = 0$，则由（5）式，令 $x=0$ 得

$$0=\sum_{j=1}^{k}|(x,\ u_j)|^2=\sum_{j=1}^{k}a_j^2,$$

所以 $a_j=0$，$j=1,2,\cdots,k$。即 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$ 线性无关。

若 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset H$ 且为线性无关的，考虑由 $\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}$ 张成的空间，记作 $M=[u_1,u_2,\cdots,u_k]$，即

$$M=\left\{\sum_{j=1}^{k}a_j u_j \,\middle|\, a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\in \boldsymbol{C}\right\}.$$

任给 $x\in H$，研究 x 到子空间 M 的距离。可以证明 M 是 H 的闭子空间（读者自证）。

由定理 3 知，存在 $x_0\in M$，使得

$$\|x-x_0\|=\inf\left\{\left\|x-\sum_{j=1}^{k}a_j u_j\right\| \,\middle|\, a_1,\ \cdots,\ a_k\in \boldsymbol{C}\right\}=\delta.$$

现在来确定 x_0。$x_0\in M$，故 x_0 可写成 $x_0=\sum_{j=1}^{k}c_j u_j$，又由Hilbert空间的直交分解定理知 $x-x_0\in M^{\perp}$，所以

$$(x-x_0,\ u_i)=0,\ i=1,2,\cdots,k.$$

即 $(x_0,\ u_i)=(x,\ u_i)$，$i=1,2,\cdots,k$。将 $x_0=\sum_{j=1}^{k}c_j u_j$ 代入，得方程组。

$$\sum_{j=1}^{k}(u_j,\ u_i)c_j=(x,\ u_i),$$

由此可确定 c_j，从而得 x_0。且由 $x-x_0\in M^{\perp}$，得

$$\delta^2=\|x-x_0\|^2=(x-x_0,\ x-x_0)=\|x\|^2-(x,\ x_0)$$

$$=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{k}\overline{c_j}(x,\ u_j).$$

特别地，若$\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$是$H$的标准正交集合，则得

$$c_i=(x, u_i),$$

且
$$\delta^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{k}\overline{(x,u_j)}(x,u_j)$$
$$=\|x\|^2-\sum_{j=1}^{k}|(x, u_j)|^2. \tag{6}$$

一般地，考虑H中无穷标准正交集合$\{u_\alpha | \alpha\in A\}$，这是指$(u_\alpha, u_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$，$\alpha$，$\beta\in A$。另外，我们说无穷集合$\{u_\alpha | \alpha\in A\}$是线性无关的，是指集合中任意有限个元素都是线性无关的。

若$\{u_\alpha | \alpha\in A\}$是Hilbert空间$H$中的一组标准正交集合，则由上面的讨论知，对于$A$中任一有限子集$F$，利用(6)式得

$$\|x\|^2\geqslant\sum_{\alpha\in F}|(x, u_\alpha)|^2, \ \forall x\in H. \tag{7}$$

下面给出无限和$\sum\limits_{\alpha\in A}$的意义。

定义 6 若φ是$A\to[0, \infty]$的函数，则定义$\sum\limits_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)$如下：

$$\sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)=\sup\left\{\sum_{\alpha\in F}\varphi(\alpha) \mid F\text{是}A\text{的有限子集}\right\}.$$

由以上定义看出，若φ在某个点α为无穷大，则$\sum\limits_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)$一定是无穷的。若$\sum\limits_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)$是有限的，则最多只能有可数个$\alpha$，使$\varphi(\alpha)\neq 0$。

按以上无穷和的定义，由不等式(7)得

$$\sum_{\alpha\in A}|(x, u_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{8}$$

称(8)式为Bessel不等式. 记$\hat{x}(\alpha)=(x, u_\alpha)$, $\hat{x}(\alpha)$称为x关于标准正交集合$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$的Fourier系数. Bessel不等式写成

$$\sum_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{8'}$$

若在A中引入计数测度μ, 则A中的每个子集合都可测, 且任意的$\varphi: A\to[0, \infty]$都是可测函数, 于是

$$\sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha)=\int_A\varphi\mathrm{d}\mu.$$

事实上$\varphi\geqslant0$可测, 则有简单函数$S_n\leqslant\varphi$, 且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\varphi$. 又

$$S_n=a_1\chi_{A_1}+a_2\chi_{A_2}+\cdots+a_k\chi_{A_k},$$

其中A_1, A_2, $\cdots$, A_k互不相交, χ_{A_i}为A_i上的特征函数.

由于 $\int_A S_n\mathrm{d}\mu=a_1\mu(A_1)+a_2\mu(A_2)+\cdots+a_k\mu(A_k)$,

且 $$\int_A\varphi\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A S_n\mathrm{d}\mu,$$

故有 $$\int_A\varphi\mathrm{d}\mu=\sum_{\alpha\in A}\varphi(\alpha),$$

此时(8′)式可写成

$$\int_A|\hat{x}(\alpha)|^2\mathrm{d}\mu\leqslant\|x\|^2,$$

即Bessel不等式表明, 对任何$x\in H$, $\hat{x}$是指标集A到复数域C上的函数

$\hat{x}: A\to C$, 即$\alpha\to\hat{x}(\alpha)=(x, u_\alpha)$.

$\hat{x}$是属于$L^2(A, \mu)$的. 又μ是A上的计数测度, $L^2(A, \mu)=l^2(A)$, 即Hilbert空间的元素x, 其Fourier系数$\hat{x}$是l^2中的元素. 这样得到一个映射F: $H\to l^2(A)$. 即$x\to\hat{x}$. 显然F是线性的.

$$F(x+y)=(\widehat{x+y})(\alpha)=(x+y,\ u_\alpha)$$
$$=(x,\ u_\alpha)+(y,u_\alpha)=\hat{x}(\alpha)+\hat{y}(\alpha)$$
$$=F(x)+F(y),$$

$$F(\lambda x)=\widehat{\lambda x}(\alpha)=(\lambda x,\ u_\alpha)=\lambda(x,u_\alpha)=\lambda\hat{x}(\alpha)=\lambda F(x)$$

而且 F 是有界的 $\|F\|\leqslant 1$（Bessel不等式）。

定理 6 （Riesz-Fischer定理）设H是Hilbert空间，$\{u_\alpha \mid \alpha\in A\}$是$H$中一组标准正交系，则对于任意一个$l^2(A)$中的函数$\varphi$，都存在着$H$中的一个元素$x$，使得$x$关于$\{u_\alpha\}$的Fourier系数$\hat{x}$等于$\varphi$：$\hat{x}=\varphi$。换言之，映射$F$：$x\to\hat{x}$是$H$到$l^2(A)$上的映射。

证 令 $A_n=\left\{\alpha\in A\ \middle|\ |\varphi(\alpha)|>\dfrac{1}{n}\right\}$，$n=1,\ 2,\ \cdots$. 则

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots.$$

由于 $\sum\limits_\alpha|\varphi(\alpha)|^2<\infty$，每个$A_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$都是有限的.

令 $$x_n=\sum_{\alpha\in A_n}\varphi(\alpha)u_\alpha,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

考虑x_n的Fourier系数：

$$\hat{x}_n(\alpha)=(x_n,u_\alpha)=\begin{cases}\varphi(\alpha), & \text{当}\alpha\in A_n,\\ 0\ , & \text{当}\alpha\notin A_n.\end{cases}$$

所以 $\hat{x}_n(\alpha)=\varphi(\alpha)\chi_{A_n}$,

其中χ_{A_n}为A_n的特征函数，且

$$|\hat{x}_n-\varphi|^2=|\varphi\chi_{A_n}-\varphi|^2\leqslant|\varphi|^2,$$

又对一切α，当$n\to\infty$时，有$\hat{x}_n(\alpha)\to\varphi(\alpha)$. 由控制收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\|\hat{x}_n-\varphi\|^2=0\ ,$$

所以$\{\hat{x}_n\}$是$l^2(A)$中的Cauchy列，因为A_n是有限的，

$x_n=\sum_{\alpha\in A_n}\varphi(\alpha)u_\alpha$是有限多个$u_\alpha$的线性组合，所以由(5)式知

$$\|x_n\|^2=\sum_{\alpha\in A_n}|(x_n,\ u_\alpha)|^2,$$

故 $$\|x_n-x_m\|=\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\|_2.$$

这表明$\{x_n\}$是H中的Cauchy列，又H是完备的，所以存在$x\in H$，使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.

所以对于一切$\alpha\in A$有

$$\hat{x}(\alpha)=(x,\ u_\alpha)=(\lim_{n\to\infty}x_n,\ u_\alpha)=\lim_{n\to\infty}(x_n,u_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\hat{x}_n(\alpha)$$
$$=\varphi(\alpha).$$

定理证毕.

以上讨论说明F是H到$l^2(A)$上的有界线性映射，且$\|\hat{x}\|\leqslant\|x\|$，若等式$\|\hat{x}\|=\|x\|$成立，则可以将$H$与$l^2(A)$等同起来. 不等式$\|\hat{x}\|<\|x\|$成立说明标准正交集合$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$还不够大.

下面的定理证实了这个事实.

定理 7 设H是Hilbert空间，以下四个命题是等价的.

(1)$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$是H的极大标准正交集合，即不存在不等于H的标准正交集合可以包含它. 此时称$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$是完备的.

(2)$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$在H中是稠密的.

(3) $\|x\|^2=\sum\limits_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2$, $\forall x\in H$.

(4) $(x,y)=\sum\limits_{\alpha\in A}\hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$, $\forall x,y\in H$.(parseval等式)

证 (1)$\Longrightarrow$(2).

用反证法，若$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$的闭包记为M，且$M\neq H$，则$M^\perp\neq 0$.

即存在$u\neq 0$，$u\in M^{\perp}$. 于是$\{u_\alpha|\alpha\in A\}\cup\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\}$仍是一个标准正交集合，显然它包含了$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$此与(1)矛盾．故$M=H$，(2)得证．

(2)$\Longrightarrow$(3)．

任给$x\in H$，由于$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$在H中稠密，故任给$\varepsilon>0$，存在u_{α_1}，u_{α_2}，…，u_{α_k}及c_1，c_2，…，$c_k\in\boldsymbol{C}$使得

$$\|x-\sum_{j=1}^{k}c_ju_{\alpha_j}\|<\varepsilon.$$

若记$M_1=\left\{\sum_{j=1}^{k}c_ju_{\alpha_j}\,|c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k\in\boldsymbol{C}\right\}$，则$x$到子空间$M_1$的距离，即$\|x-\sum_{j=1}^{k}c_ju_{\alpha_j}\|$的下确界在点$x_0=\sum_{j=1}^{k}(x,u_{\alpha_j})u_{\alpha_j}$处达到，即

$$\|x-\sum_{j=1}^{k}(x,\ u_{\alpha_j})u_{\alpha_j}\|=\|x-\sum_{j=1}^{k}\hat{x}(\alpha_j)u_{\alpha_j}\|$$

$$\leqslant\|x-\sum_{j=1}^{k}c_ju_{\alpha_j}\|<\varepsilon,$$

所以 $$\|x\|-\varepsilon\leqslant\|\sum_{j=1}^{k}\hat{x}(\alpha_j)u_{\alpha_j}\|,$$

$$(\|x\|-\varepsilon)^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^{k}\hat{x}(\alpha_j)u_{\alpha_j},\ \sum_{j=1}^{k}\hat{x}(\alpha_j)u_{\alpha_j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(\hat{x}(\alpha_j))^2\leqslant\sum_{\alpha\in A}(\hat{x}(\alpha))^2=\|\hat{x}\|_2^2,$$

由此得 $$\|x\|\leqslant\|\hat{x}\|_2,$$

又由Bessel不等式知$\|\hat{x}\|_2\leqslant\|x\|$．所以

$$\|x\|^2=\|\hat{x}\|_2^2=\sum_{\alpha\in A}|\hat{x}(\alpha)|^2.$$

(3)⟹(4)

(x, y)是H中的内积，$\sum\limits_{\alpha\in A}\hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}=(\hat{x}, \hat{y})$是$l^2$中的内积，现证明它们相等。

由(3)知，$(x+\lambda y, x+\lambda y)=(\widehat{x+\lambda y}, \widehat{x+\lambda y})$

$=(\hat{x}+\lambda\hat{y}, \hat{x}+\lambda\hat{y})$,

即 $\lambda(y, x)+\bar{\lambda}(x, y)=\lambda(\hat{y}, \hat{x})+\bar{\lambda}(\hat{x}, \hat{y})$,

取$\lambda=1$，得$\mathrm{Re}(x, y)=\mathrm{Re}(\hat{x}, \hat{y})$. 取$\lambda=i$，得$\mathrm{Im}(x, y)=\mathrm{Im}(\hat{x}, \hat{y})$. 所以$(x, y)=(\hat{x}, \hat{y})$. (4)得证。

(4)⟹(1)

用反证法，若$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$不是H中极大标准正交集合，则存在$u\neq 0, u\in H$，使得$u\perp u_\alpha, \forall\alpha\in A$. 则由(4)知$(u, u)=(\hat{u}, \hat{u})$. 因$u\neq 0$，所以$(u, u)\neq 0$. 又$\hat{u}(\alpha)=(u, u_\alpha)=0$，所以$(\hat{u}, \hat{u})=\sum\limits_\alpha|\hat{u}(\alpha)|^2=0$得出矛盾. 故(1)成立. 定理得证。

利用Zorn引理可以得到以下定理。

定理 8 每一个Hilbert空间H，一定存在着一个极大的标准正交集合，称为H的完备标准正交系。

综合以上定理知，若$\{u_\alpha|\alpha\in A\}$是Hilbert空间H的完备标准正交系，则对于H内的任一元素x，必有$l^2(A)$中一个元素$\hat{x}$（x关于$\{u_\alpha\}$的Fourier系数）与之对应，反之由Riesz-Fischer定理知，任给$l^2(A)$中一个元素φ，必有H中的一个元素x，其Fourier系数$\hat{x}$等于φ. 若以F表示H到$l^2(A)$的映射，则F是映上的，一一的，且保持内积. 显然F为有界线性映射. 即有以下定理。

定理 9 每一个Hilbet空间H都与某个$l^2(A)$空间等距同构。

记作$H \cong l^2(A)$。

可以证明Hilbert空间H的完备标准正交系的基数是可数的，即A是可数集合．此时称H是可分的．

例 若$H=L^2(T)$．令$u_n(t)=e^{int}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，则$\{u_n | n\in \boldsymbol{Z}\}$是$L^2(\boldsymbol{T})$的完备标准正交系。

证 $\{u_n | n\in \boldsymbol{Z}\}$是标准正交集合是显然的．事实上，

$$(u_m, u_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}e^{-int}dt=\begin{cases}0, & \text{当} m\neq n,\\ 1, & \text{当} m=n.\end{cases}$$

为证明其完备性，由定理7中(2)知，只需证明$\{u_n\}$在$L^2(\boldsymbol{T})$中稠密．因为三角多项式在$C(\boldsymbol{T})$中（按$C(\boldsymbol{T})$的范数）是稠密的。即若$g\in C(\boldsymbol{T})$，则有三角多项式p，使得$\| g-p \|_\infty<\varepsilon$。又

$$\| g \|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \| g \|_\infty^2 dt\right)^{1/2}=\| g \|_\infty,$$

故$g\in L^2(\boldsymbol{T})$且$\| g-p \|_2\leqslant \| g-p \|_\infty<\varepsilon$。所以$p$在$L^2$意义下逼近$g$．又$C(\boldsymbol{T})$在$L^2(\boldsymbol{T})$中是稠密的，故三角多项式在$L^2(\boldsymbol{T})$中是稠密的．所以$\{e^{int} | n\in \boldsymbol{Z}\}$是$L^2(\boldsymbol{T})$中的完备标准正交系。

任给$f\in L^2(\boldsymbol{T})$，则

$$(f, u_n)=\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

即为f的Fourier系数．此时对于$A=\boldsymbol{Z}$，即$l^2(\boldsymbol{Z})$有古典的Riesz-Fischer定理。

定理6′（Riesz-Fischer定理） 若$C_n\in \boldsymbol{C}$，$n\in \boldsymbol{Z}$，且$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2<\infty$，则存在$f\in L^2(\boldsymbol{T})$使得$\hat{f}(n)=C_n$、 即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt=C_n.$$

§ 4.4 Hilbert空间的自共轭性

本节讨论Hilbert空间H上的有界线性泛函，即研究H的共轭空间H^*. 可以证明共轭空间H^*和H是等价的，这就是Hilbert空间的自共轭性.

定理10 若φ是Hilbert空间H上的有界线性泛函，则在H中存在唯一的元素y，使得对每一个$x\in H$，有$\varphi(x)=(x, y)$，且$\|\varphi\|=\|y\|$.

证 若φ是H上的零泛函，即对一切$x\in H$有$\varphi(x)=0$，则$y=0$.

若φ是非零有界线性泛函，记φ的零空间为$N(\varphi)$:

$$N(\varphi)=\{x\in H|\ \varphi(x)=0\},$$

则$N(\varphi)$是H的真闭子空间. 事实上，由于$\varphi\neq 0$，故至少存在一个$y\in H$使$\varphi(y)\neq 0$. 所以$N(\varphi)\neq H$. 又φ是线性泛函，显然$N(\varphi)$是H的线性子空间. 再由于单点集$\{0\}$是闭的，且φ为连续的，故$\{0\}$的原像$N(\varphi)$是闭的.

由Hilbert空间的直交分解定理知，存在$z\neq 0$，$z\in N^{\perp}(\varphi)$，故$\varphi(z)\neq 0$.

任给$x\in H$，则$\varphi(\varphi(x)z)=\varphi(x)\varphi(z)$，$\varphi(\varphi(z)x)=\varphi(z)\varphi(x)$，所以$\varphi(\varphi(z)x-\varphi(x)z)=0$. 即$\varphi(z)x-\varphi(x)z\in N(\varphi)$，故必与$z$正交，

$$(\varphi(z)x-\varphi(x)z,\ z)=0,$$

即

$$\varphi(z)(x,\ z)=\varphi(x)(z,\ z),$$

或

$$\varphi(x)=\frac{\varphi(z)}{(z,\ z)}(x,\ z).$$

取$y=\dfrac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2}z$，则有

$$\varphi(x)=(x,\ y).$$

易见y是唯一的. 若另有$y'\in H$，使得对一切$x\in H$有$\varphi(x)=$

(x, y')，则有

$$(x, y-y')=0, \quad \forall x \in H.$$

于是得 $\|y-y'\|=0$，故 $y-y'=0$，即 $y=y'$。

再证 $\|\varphi\|=\|y\|$。由Schwarz不等式有

$$|\varphi(x)|=|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|,$$

故 $$\|\varphi\| \leqslant \|y\|.$$

另一方面，$\varphi(y)=(y, y)=\|y\|^2$，或 $\|y\|=\dfrac{\varphi(y)}{\|y\|}$。又

$$\|\varphi\|=\sup\left\{\frac{|\varphi(y)|}{\|y\|}, \quad y \neq 0\right\},$$

得 $$\|\varphi\| \geqslant \|y\|.$$

所以 $$\|\varphi\|=\|y\|.$$

定理得证。

由 $\varphi(x)=(x, y)$ 知 φ 关于 x 是线性的，而关于 y 是共轭线性的。事实上，

$$\alpha\varphi(x)=\alpha(x, y)=(\alpha x, y)=(x, \bar{\alpha}y).$$

此时也称 (x, y) 为殆线性的，若将 $\varphi(x)$ 记作 $\varphi_y(x)$，则 $\varphi_y(x)$ 是殆线性的。

以上定理说明，若作Hilbert空间 H 到它的共轭空间 H^* 的映射 $\mathscr{F}$ 如下：

$$\mathscr{F}: y \to \varphi_y, \quad y \in H.$$

则 $\mathscr{F}$ 是 H 到 H^* 上的一一映射，它是共轭线性的，且保持范数不变。即 $\mathscr{F}$ 是 H 到 H^* 的复共轭线性同构，也就是 H 和 H^* 是一致的，故称 H 是自共轭的。

定理11 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是Hilbert空间 H 中的直交序列，则下列三个命题是等价的。

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$收敛，

（3）对于每一个$y\in H$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y)$收敛。

证 令$s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，由于$\{x_n\}$是正交集合，故$\|s_n\|^2=\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$。

（2）$\Longrightarrow$（1）。

设$n>m$，$\|s_n-s_m\|=\|x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_n\|$

$$=(\|x_{m+1}\|^2+\|x_{m+2}\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)^{1/2}$$

由（2）知，任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>m>N$有

$$\sum_{k=m}^{n}\|x_k\|^2<\varepsilon^2.$$

所以只要取$m>N$，有

$$\|s_n-s_m\|<\varepsilon,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。（1）得证。

（1）$\Longrightarrow$（3）。

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$存在。考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y)$的部分和$t_n$：

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k,\ y)=(\sum_{k=1}^{n}x_k,\ y)=(s_n,\ y).$$

令$t=(s,\ y)$，由Schwarz不等式知

$$|t_n-t|=|(s_n-s,\ y)|\leqslant\|s_n-s\|\,\|y\|,$$

因为$\|s_n-s\|\to 0$，故$|t_n-t|\to 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$。即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y)$收敛，（3）得证。

(3)$\Longrightarrow$(2).

定义H上的有界线性泛函Λ_n如下：

$$\Lambda_n y=(y,\ x_1)+(y,\ x_2)+\cdots+(y,\ x_n),\ \forall y\in H.$$

显然Λ_n是线性的，且由Schwarz不等式得

$$|\Lambda_n y|\leqslant\|y\|\ \|x_1+x_2+\cdots+x_n\|,$$

即
$$\|\Lambda_n\|\leqslant\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|.$$

又取$y=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则得

$$|\Lambda_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)|=\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2.$$

所以
$$\|\Lambda_n\|\geqslant\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|.$$

故得
$$\|\Lambda_n\|=\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|.$$

由(3)知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,\ y)$收敛，故$\{\Lambda_n y\}$($n=1,\ 2,\ \cdots,$)对一切$y$是有界的，即$\{\|\Lambda_n y\|\}$是有界的，根据Banach-Steinhaus定理知$\{\Lambda_n\}$是一致有界的．即存在$M>0$，对于一切n有

$$\|\Lambda_n\|\leqslant M.$$

又 $\|\Lambda_n\|=\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|=(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2)^{1/2}$，故对一切$n$有

$$\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\leqslant M^2.$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$收敛，(2)得证．

定理中(1)说明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$在$H$中是强收敛的，而(3)说明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$是弱收敛的．定理给出Hilbert空间中正交序列所对应的级数强收敛与弱收敛是等价的．

§4.5 Hilbert空间上的线性算子

设H是Hilbert空间，$B(H)$表示H上一切有界线性算子T的集合，在$B(H)$上定义乘法

$$(T\cdot S)(x)=T(S(x)),\quad \forall x\in H.$$

范数为 $$\|T\|=\sup\{\|Tx\| \mid \|x\|\leqslant 1\},$$

则$B(H)$是一个Banach代数，具有单元I：$I(x)=x$。一般来讲$B(H)$是不可交换的。

定理12 若$T\in B(H)$，且对每一个$x\in H$有$(Tx,x)=0$，则$T=0$。

证 任取$x, y\in H$，由假设条件知

$$(T(x+y),\ x+y)=0,$$

即 $$(Tx,\ x)+(Tx,\ y)+(Ty,\ x)+(Ty,\ y)=0.$$

由假设得 $$(Tx,\ y)+(Ty,\ x)=0, \tag{9}$$

在(9)式中以iy代替y，得

$$-i(Tx,\ y)+i(Ty,\ x)=0, \tag{10}$$

由(9)、(10)两式得$(Tx,y)=0$对一切$x,y\in H$成立。取$y=Tx$，得$\|Tx\|^2=0$，即对一切x有$Tx=0$。证毕。

推论1 若$S\in B(H)$，$T\in B(H)$，且对每一个$x\in H$有$(Sx,x)=(Tx,x)$，则$T=S$。

证 由假设知对一切x有$((S-T)x,x)=0$，所以$(S-T)x=0$对一切$x\in H$成立，即$S=T$。

定理13 若$f:H\times H\to \mathbf{C}$是殆线性泛函且为有界的，即

$$M=\sup\{|f(x,y)| \mid \|x\|=\|y\|=1\}<\infty,$$

则存在唯一的有界线性算子$S\in B(H)$，满足

$$f(x,y)=(x,Sy),\quad \forall x,y\in H,$$

而且$\|S\|=M$。

证 因为$f(x,\ y)$对x是线性的，$|f(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|$，

所以对于每一个$y\in H$，变换$\Lambda_y:H\to\mathbf{C}$:

$$x\xrightarrow{\Lambda_y}f(x,\ y)$$

是H上的有界线性泛函，且$\|\Lambda_y\|\leqslant M\|y\|$。即$\Lambda_y\in H^*$。由定理10知，对于每一个$y\in H$，存在唯一的元素$Sy\in H$，使得$\Lambda_y x=f(x,y)=(x,Sy)$，且$\|Sy\|=\|\Lambda_y\|$。所以$\|Sy\|\leqslant M\|y\|$。

又S作为$H\to H$的映射，即$y\to Sy$是线性的，事实上，

$$(x,\ S(y_1+y_2))=f(x,\ y_1+y_2)=f(x,y_1)+f(x,y_2)$$
$$=(x,\ Sy_1)+(x,\ Sy_2)=(x,\ Sy_1+Sy_2).$$
$$(x,\ S(\alpha y))=f(x,\ \alpha y)=\overline{\alpha}f(x,\ y)=\overline{\alpha}(x,\ Sy)=(x,\alpha Sy).$$

即$S\in B(H)$，且$\|S\|\leqslant M$。

另一方面$|f(x,y)|=|(x,Sy)|\leqslant\|x\|\|S\|\|y\|$，

所以$M\leqslant\|S\|$。最后得到$\|S\|=M$。定理得证。

若$T\in B(H)$，$x,y\in H$，则$(Tx,\ y)$对x为线性的，对y为共轭线性的。即映射$f:x,y\to(Tx,y)$为殆线性的。且

$$|f(x,\ y)|=|(Tx,\ y)|\leqslant\|T\|\|x\|\|y\|,$$

即$\|f\|\leqslant\|T\|$。f是有界的，由定理13知，在$B(H)$中存在唯一的元素，记作T^*，使得

$$(Tx,y)=(x,T^*y).$$

称T^*为T的共轭算子或伴随算子。

容易看出$\|T^*\|=\|T\|$。事实上由定理13知

$$\|T^*\|\leqslant\|T\|.$$

另外，$\|Tx\|^2=(Tx,\ Tx)=(x,\ T^*Tx)\leqslant\|x\|\|T^*\|\|Tx\|$，所以$\|Tx\|\leqslant\|x\|\|T^*\|$，即$\|T\|\leqslant\|T^*\|$。于是有$\|T\|=\|T^*\|$。

$T\to T^*$可以看成由Banach代数$B(H)$到$B(H)$的一个映射，它具有以下四个性质:

（1）$(S+T)^*=S^*+T^*$

（2）$(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$

(3) $(ST)^* = T^* S^*$

(4) $T^{**} = T$

下面证明(1)—(4).

(1) $((S+T)x, \ y) = (x, \ (S+T)^* y)$. 又

$$((S+T)x, \ y) = (Sx, \ y) + (Tx, \ y) = (x, \ S^* y) + (x, \ T^* y)$$
$$= (x, \ S^* + T^* y).$$

所以 $$(S+T)^* = S^* + T^*.$$

(2) $(x, (aT)^* y) = (aTx, \ y) = a(Tx, \ y) = a(x, \ T^* y)$

$$= (x, \overline{a} T^* y).$$

所以 $$(aT)^* = \overline{a} T^*.$$

(3) $(x, \ (ST)^* y) = (STx, \ y) = (Tx, \ S^* y) = (x, \ T^* S^* y)$

所以 $$(ST)^* = T^* S^*.$$

(4) $(Tx, \ y) = (x, \ T^* y) = \overline{(T^* y, x)} = \overline{(y, T^{**} x)}$

$$= (T^{**} x, \ y)$$

所以 $$T^{**} = T.$$

映射$T \to T^*$满足以上四个性质，称$T \to T^*$为$B(H)$上的一个对合(*involution*).

由于 $\| T^* T \| \leqslant \| T^* \| \ \| T \| = \| T \|^2$,

及 $\| Tx \|^2 = (Tx, \ Tx) = (x, T^* Tx) \leqslant \| T^* T \| \ \| x \|^2$,

即 $\| T \|^2 \leqslant \| T^* T \|$, 得

$$\| T^* T \| = \| T \|^2. \tag{11}$$

在Banach代数$B(H)$上由$(Tx, y) = (x, T^* y)$定义了$T \to T^*$的对合，且满足(11)。称$B(H)$为一个B^*—代数。也称$T \to T^*$为一个周期为2的反自同构。(*Anti-automorphism of period 2*).

定理14 若$T \in B(H)$, $N(T)$表示T的零空间, $R(T)$表示T的值域，则

$$N(T) = R(T^*)^{\perp}, \quad N(T^*) = R(T)^{\perp}$$

证 $N(T) = \{x \in H \mid Tx = 0\}$, $R(T) = \{Tx \mid x \in H\}$

$$x\in N(T)\Longleftrightarrow Tx=0\Longleftrightarrow(Tx,\ y)=0,\ \forall y\in H$$

$$\Longleftrightarrow(x,\ T^*y)=0,\ \forall y\in H\Longleftrightarrow x\in R(T^*)^{\perp}.$$

所以 $\qquad N(T)=R(T^*)^{\perp}.$

同理可得 $N(T^*)=R(T)^{\perp}.$

定义 7 设算子$T\in B(H)$,

(1)若$TT^*=T^*T$, 则称T为正规算子.

(2)若$T^*=T$, 则称T为自共轭算子.

(3)若$TT^*=I=T^*T$, 其中I为H上的单位算子, 则称T为酉算子或保范算子.

(4)若$T^2=T$, 则称T为射影算子.

由定义知自共轭算子和酉算子必为正规算子, 在$B(H)$中我们主要是讨论正规算子.

定理15 设$T\in B(H)$,

(1)T是正规算子, 当且仅当对一切$x\in H$, $\|Tx\|=\|T^*x\|$成立.

(2)若T是正规算子, 则$N(T)=N(T^*)=R(T)^{\perp}$.

(3)若T是正规算子,且对某个$x\in H$, $\alpha\in \mathbf{C}$有$Tx=\alpha x$,则必有$T^*x=\overline{\alpha}x$.

(4)若T是正规算子, α、β是T的不同的特征值, 则与之相应的特征空间相互正交.

证 (1)任给$x\in H$, 有

$$\|Tx\|=(Tx,\ Tx)=(x,\ T^*Tx),$$

$$\|T^*x\|=(T^*x,\ T^*x)=(x,\ TT^*x),$$

若T为正规算子, 则$T^*T=TT^*$, 所以$\|Tx\|=\|T^*x\|$.

反之, 若$\|Tx\|=\|T^*x\|$, 则

$$(x,T^*Tx)=(x,TT^*x),$$

所以$T^*T=TT^*$, 故T为正规算子.

(2)$x\in N(T)\Longleftrightarrow Tx=0\Longleftrightarrow\|Tx\|=0\Longleftrightarrow\|T^*x\|=0\Longleftrightarrow$

$$T^*x=0\Longleftrightarrow x\in N(T^*).$$

所以$N(T)=N(T^*)$，再利用定理14得

$$N(T)=N(T^*)=R(T)^{\perp}.$$

（3）由假设T是正规的，则$T-\alpha I$也是正规的。事实上，

$$(T-\alpha I)^*=T^*-\overline{\alpha}I,$$

注意到T与T^*，T与I是可交换的，得

$$(T-\alpha I)(T-\alpha I)^*=(T-\alpha I)^*(T-\alpha I).$$

若对某个$x\in H$，$\alpha\in\mathbf{C}$有$Tx=\alpha x$，则$(T-\alpha I)x=0$，利用（2）得$(T-\alpha I)^*x=0$，即$T^*x=\overline{\alpha}x$。

这个结论说明，若α是正规算子T的特征值，则$\overline{\alpha}$必为算子T^*的特征值。

（4）设$Tx=\alpha x, Ty=\beta y, \alpha\neq\beta$。则

$$\alpha(x,y)=(\alpha x,y)=(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,\overline{\beta}y)=\beta(x,y).$$

即
$$(\alpha-\beta)(x,y)=0.$$

因为$\alpha\neq\beta$，所以$(x,y)=0$。即$x\perp y$，证毕。

定理16 若$T\in B(H)$，则以下三个命题是等价的。

（1）T是酉算子。

（2）$R(T)=H$，且对所有的$x\in H$、$y\in H$，$(Tx, Ty)=(x,y)$恒成立。

（3）$R(T)=H$，且对一切$x\in H$，$\|Tx\|=\|x\|$恒成立。

证 （1）$\Longrightarrow$（2）。

T是酉算子，$T^*T=I=TT^*$。则对于H的任一元素x都有

$$x=Ix=TT^*x=T(T^*x).$$

这表明$R(T)=H$。又由$T^*T=I$得

$$(Tx,Ty)=(x,T^*Ty)=(x,y).$$

（2）$\Longrightarrow$（3）。显然，只需在（2）中取$x=y$。

（3）$\Longrightarrow$（1）。对于每一个$x\in H$，由（3）有

$$(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|^2=\|x\|^2=(x,x),$$

所以
$$T^*T=I$$

另一方面，（3）蕴涵着T是H到H上的等距线性映射，所以T

在$B(H)$中有逆. 又由$T^*T=I$知$T^*=T^{-1}$. 所以$T^*T=TT^*=I$. 即T为酉算子. 证毕.

注: (1)、(2)的等价性表明酉算子是H上的线性同构, 且保持内积, 所以是Hilbert空间的自同构.

定理17 设$T\in B(H)$是射影算子, 以下四个性质是等价的.

(1) T是自共轭算子.

(2) T是正规算子.

(3) $R(T)=N(T)^{\perp}$.

(4) $(Tx,x)=\|Tx\|^2$对每一个$x\in H$成立.

证

(1)$\Longrightarrow$(2). 由定义显然.

(2)$\Longrightarrow$(3). T是正规算子, 由定理15知, $N(T)=R(T)^{\perp}$. T是射影算子, 则$R(T)=N(I-T)$. 事实上, 若$Tx\in R(T)$, 则$(I-T)Tx=Tx-T^2x=0$. 即$Tx\in N(I-T)$. 所以$R(T)\subset N(I-T)$.

反之, 若$y\in N(I-T)$, 则$y=Ty$, 即$y\in R(T)$.

所以 $$N(I-T)\subset R(T).$$

又$I-T$是有界线性算子, 其零空间是闭的, 故$R(T)$是H的闭子空间. 由定理5得

$$[R(T)^{\perp}]^{\perp}=R(T)=N(T)^{\perp}.$$

(3)$\Longrightarrow$(4).

若(3)成立, 则每一个$x\in H$可唯一地表示为$x=y+z$, 其中$Ty=0$, $z\in N(T)^{\perp}=R(T)$. 即$z\perp y$且存在$u\in H$使$Tu=z$. 又T是射影算子. 故

$$Tz=TTu=Tu=z.$$

即得 $$Tx=Tz=z.$$

所以$(Tx,\ x)=(z,\ y+z)=(z,\ z)=\|Tx\|^2$.

(4)$\Longrightarrow$(1).

若(4)成立. 则

$$\|Tx\|^2=(Tx,x)=(x,T^*x)$$

注意到$\|Tx\|^2$是实数，故由上式知$(x,T^*x)=(T^*x,x)$。于是对一切$x\in H$有

$$(Tx,x)=(T^*x,x)$$

由定理12，得$T=T^*$。即T是自共轭算子，证毕。

定理18 设T是自共轭算子，$S\in B(H)$，则$TS=0$当且仅当$R(T)\perp R(S)$。

证 对于一切$x,y\in H$有

$$(Tx,Sy)=(x,T^*Sy)=(x,TSy).$$

若$TS=0$，则$(Tx,Sy)=0$，所以$R(T)\perp R(S)$。

反之，若$R(T)\perp R(S)$，则$(x,TSy)=0$对一切$x\in H$，$y\in H$成立。所以$TS=0$．证毕。

顺便指出，在B^*-代数$B(H)$中，由于引入了对合，可以将$B(H)$中的算子T唯一表示成

$$T=A+iB,$$

其中A、B皆为自共轭算子。

事实上，若以上表示式成立，则

$$T^*=(A+iB)^*=A^*+\overline{i}B^*=A-iB,$$

于是必有

$$A=\frac{T+T^*}{2},\quad B=\frac{T-T^*}{2i}.$$

显然A、B是自共轭的。

以上事实类似于复函数由实部与虚部来表示，由此可以理解对合的意义。

下面研究B^*-代数$B(H)$中算子的交换性质。若x,y是$B(H)$中的可交换算子，即$xy=yx$，则由$x^*y^*=(yx)^*$知x^*、y^*也是可交换的。那末x与y^*或x^*与y是否可交换？一般言之，答案是否定的。例如取$y=x$，当x不是正规算子时，则$xx^*\neq x^*x$。可以证明下列命题是成立的。

若M是$B(H)$中的正规算子，$T\in B(H)$且$MT=TM$，则$M^*T=TM^*$。

事实上，成立着如下所示的更一般的结论。

定理 19（Fuglede-Putnam-Rosenblum）设M、N、$T\in B(H)$，M、N是正规算子且$MT=TN$，则$M^*T=TN^*$。

证 取$S\in B(H)$，令$V=S^*-S$。定义

$$Q=\exp(V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}V^n.$$

又$V^*=S-S^*=-V$，所以

$$Q^*=\exp(-V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-V)^n.$$

于是有 $QQ^*=\exp(V-V)=1$，$Q^*Q=1$，

即Q为酉算子，且$\|Q\|=1$。即对一切$S\in B(H)$有

$$\|\exp(S^*-S)\|=1.$$

由于$MT=TN$，得

$$M^2T=M(MT)=M(TN)=(MT)N=TN^2,$$

用归纳法可得

$$M^kT=TN^k,\quad K=1,\ 2,\ \cdots$$

所以 $\exp(M)T=T\exp(N)$.

由$[\exp(M)]^{-1}=\exp(-M)$得

$$T=\exp(-M)T\exp(N)$$

上式左乘$\exp(M^*)$，右乘$\exp(-N^*)$，并利用M，N是正规算子，得

$$\exp(M^*)T\exp(-N^*)=\exp(M^*-M)T\exp(N-N^*),$$

所以 $\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\|\leqslant\|T\|$.

由于M、N是正规的，知λM、λN也是正规的，其中λ为任何复数。在上式中以$\overline{\lambda}M$，$\overline{\lambda}N$分别代替M、N，得

$$\|\exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda M^*)\|\leqslant\|T\|,\ \forall\lambda\in\mathbf{C}.$$

记　$f(\lambda)=\exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*)$, $\forall\lambda\in\boldsymbol{C}$.
则$\|f(\lambda)\|\leqslant\|T\|$对一切$\lambda\in\boldsymbol{C}$成立. 于是$f(\lambda)$是一个有界的取值于$B(H)$的整函数, 由Liouville定理知$f(\lambda)\equiv C$. 所以

$$f(\lambda)=f(0)=T, \quad \forall\lambda\in\boldsymbol{C}.$$

即

$$\exp(\lambda M^*)T=T\exp(\lambda N^*).$$

比较等式两端λ的系数, 得

$$M^*T=TN^*.$$

§4.6　B*-代数的Gelfand变换

定理20 (Gelfand-Naimark定理)　设A是可交换的B^*-代数, 具有单元e, 且$\|e\|=1$, $\varDelta$是A的极大理想空间, 则Gelfand变换$x\to\hat{x}$即$A\to\hat{A}$是A到$C(\varDelta)$上的一个保持范数的*—同构. 即保持所有代数运算, 且保持对合$\widehat{x^*}=\overline{\hat{x}}$. 特别地, 若$x$是自共轭的$x=x^*$, 则$\hat{x}$是实值的连续函数.

证　已知$\varphi\in\varDelta$, 作Gelfand变换$\hat{x}(\varphi)=\varphi(x)$, $x\in A$, 若取Gelfand弱拓扑, 则$\hat{x}$是连续函数, 即$\hat{x}\in C(\varDelta)$, 故$\hat{A}\subset C(\varDelta)$.

首先证明, 若$u\in A$是自共轭的, $u=u^*$, 则$\hat{u}$是实的. 任取代数同态$\varphi\in\varDelta$, 证明$\hat{u}(\varphi)$是实的.

设$\hat{u}(\varphi)=\varphi(u)=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $(\alpha, \beta\in\boldsymbol{R})$. 令$z=u+\mathrm{i}te$, 其中$t\in\boldsymbol{R}$, 则$z^*=u^*-\mathrm{i}te^*=u-\mathrm{i}te$, 且

$$\varphi(z)=\varphi(u)+\mathrm{i}t\varphi(e)=\alpha+\mathrm{i}(\beta+t),$$

所以　$\alpha^2+(\beta+t)^2=\varphi(z)\overline{\varphi(z)}=|\varphi(z)|^2\leqslant\|\varphi\|^2\|z\|^2$,
又$\|\varphi\|\leqslant 1$且$\|z\|^2=\|zz^*\|=\|u^2+t^2e\|\leqslant\|u\|^2+t^2$. 于是有

$$\alpha^2+\beta^2+2\beta t\leqslant\|u\|^2$$

对一切$t\in\boldsymbol{R}$成立. 所以$\beta=0$, 即$\hat{u}(\varphi)\in\boldsymbol{R}$. 由于$\varphi$是任取的,

故$\hat{u}(\Delta)\in \hat{R}$。

下面证明$\widehat{x^*}=\overline{\hat{x}}$。任取$x\in A$，则$x=u+iv$，其中$u=u^*$，$v=v^*$。故$x^*=u-iv$。所以

$$\widehat{x^*}=\hat{u}-i\hat{v}=\overline{\hat{u}+i\hat{v}}=\overline{\hat{x}}.$$

再证$A\to\hat{A}$保持范数，即$\|\hat{x}\|_\infty=\|x\|$。利用公式

$$\|\hat{x}\|_\infty=\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

来证明，先假设x是自共轭的，$x=x^*$，则

$$\|x^2\|=\|xx^*\|=\|x\|^2,$$

所以
$$\|x^{2^n}\|=\|x\|^{2^n},$$

或
$$\|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}=\|x\|.$$

于是有
$$\|\hat{x}\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}=\|x\|.$$

一般地，若x不是自共轭的，令$z=xx^*$，则$z=z^*$，所以$\|\hat{z}\|_\infty=\|z\|$。又$\hat{z}=\hat{x}\widehat{x^*}$，且已证明$\widehat{x^*}=\overline{\hat{x}}$故

得
$$\|\hat{z}\|_\infty=\|\hat{x}\widehat{x^*}\|_\infty=\|\hat{x}\overline{\hat{x}}\|_\infty=\||\hat{x}|^2\|_\infty=\|\hat{x}\|_\infty^2.$$

又
$$\|z\|=\|xx^*\|=\|x\|^2,$$

所以
$$\|\hat{x}\|_\infty=\|x\|.$$

最后证明$\hat{A}=C(\Delta)$。$\hat{A}$是$C(\Delta)$的子代数，又由$\widehat{x^*}=\overline{\hat{x}}$知，若$\hat{x}\in\hat{A}$，则$\overline{\hat{x}}\in\hat{A}$，即$\hat{A}$是自共轭的。又在第三章中已经证明$\hat{A}$是可以分离点的，同时$\hat{e}=1\neq 0$，故$\hat{A}$不在任何点消失为0。即$\hat{A}$是满足Stone-Weierstrass定理中条件（1）、（2）、（3）的子代数，所以

$$Cl\hat{A}=C(\Delta).$$

又$\|\hat{x}\|_\infty=\|x\|$，故$\hat{A}$与A是完全一样的，由此可证明$\hat{A}$是闭的. 因任取$z\in Cl\hat{A}$，则有$\hat{x}_n\in\hat{A}$，且$\hat{x}_n\to z$. 故$\{\hat{x}_n\}$是Cauchy序列。由于$A\to\hat{A}$保持范数，故$\{x_n\}$也是Cauchy序列. 故$x_n\to x$。所以$\hat{x}=z$. 即$z\in\hat{A}$. 这说明$\hat{A}$是闭的. 于是得到

$$\hat{A}=C(\varDelta).$$

定理得证。

定理21 设A是可交换的B^*-代数，具有单元，若$x\in A$使得以x和x^*为元的多项式$p(x,x^*)$在A中稠密，则

(1) Gelfand变换$\hat{x}$：$\varDelta\to\boldsymbol{C}$是$1-1$映射.

(2) 存在ψ，它是$C(\sigma(x))$到A上的保持范数的$*$-同构映射.

证 (1) 欲证$\hat{x}$是1-1映射，只需证明对于任意的$\varphi_1,\varphi_2\in\varDelta$，若$\hat{x}(\varphi_1)=\hat{x}(\varphi_2)$，则$\varphi_1=\varphi_2$.

因为$\hat{x}(\varphi_1)=\varphi_1(x)$，$\hat{x}(\varphi_2)=\varphi_2(x)$. 故若$\hat{x}(\varphi_1)=\hat{x}(\varphi_2)$，则$\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$. 又$\hat{x}^*=\overline{\hat{x}}$. 所以由$\hat{x}(\varphi_1)=\hat{x}(\varphi_2)$得$\hat{x}^*(\varphi_1)=\hat{x}^*(\varphi_2)$，即$\varphi_1(x^*)=\varphi_2(x^*)$.

又φ_1，φ_2是代数同态，多项式$p(x,x^*)$是常数与x的方幂或常数与x^*的方幂的乘积之和，故

$$\varphi_1(p(x,x^*))=\varphi_2(p(x,x^*)).$$

又$p(x,x^*)$在A中稠密，故对任意$y\in A$有

$$\varphi_1(y)=\varphi_2(y),$$

所以$\varphi_1=\varphi_2$. 即$\hat{x}$是$1-1$的.

(2) $\hat{x}$是$1-1$的，又$\hat{x}$连续且$\varDelta$是紧集合，故$\hat{x}$是由$\varDelta$到其值域$\sigma(x)$上的同胚映射，这是由于$\varDelta$是紧集合，$\hat{x}(\varDelta)=\sigma(x)$是紧的，故$\varDelta$中的闭集映成$\hat{x}(\varDelta)$中的闭集. 所以$\sigma(x)$上的连续函数可以看成是$\varDelta$上的连续函数。即

$$C(\sigma(x))\cong C(\varDelta).$$

也就是$f\to f\circ\hat{x}$为由$C(\sigma(x))$到$C(\varDelta)$上保持范数的$*$-同构映射. 由Gelfand-Naimark定理知$C(\varDelta)=\hat{A}\cong A$. 故$\varDelta$上的连续函数$f\circ\hat{x}$一定等于$A$中某个元素的Gelfand变换. 即

$$f\circ\hat{x}=(\psi f)^{\wedge}\qquad(\psi f\in A).$$

且ψf完全由 f 唯一决定，即 ψ 是一个由$C(\sigma(x))$到A上的保持范数的 *-同构映射，$\|\psi f\|=\|f\|_{\infty}$.

特别，若$f(\lambda)=\lambda\ (\lambda\in\sigma(x))$,则$f\circ\hat{x}=\hat{x}$，由$f\circ\hat{x}=(\psi f)^{\wedge}$知$\psi f=x$。定理得证.

§4.7 对合映射$x\to x^*$的性质

若A是B^*-代数，由定义知$\|xx^*\|=\|x\|^2$. 由此得出

$$\|x\|^2=\|xx^*\|\leqslant\|x\|\,\|x^*\|,$$

所以 $\qquad\|x\|\leqslant\|x^*\|$.

又 $\qquad\|x^*\|\leqslant\|x^{**}\|=\|x\|$,

于是有$\|x\|=\|x^*\|$. 所以对合映射$x\to x^*$是连续的。

若A是具有对合的B-代数，那么$x\to x^*$是否仍保持连续性呢？下面讨论这个问题。

定义 8 若A是集合X到集合Y的映射.称集合$G=\{(x,Ax)|x\in X\}$为A的图象。

定理22（闭图象定理） 若X，Y是Banach空间，A：$X\to Y$是线性的. $G=\{(x,Ax)|x\in X\}$在$X\times Y$中是闭的. 则A是连续的.

证 在$X\times Y$中定义加法、数乘和范数：

$$(x,\ y)+(x',\ y')=(x+x',\ y+y'),$$

$$\alpha(x,\ y)=(\alpha x,\ \alpha y),$$

$$\|(x,\ y)\|=\|x\|+\|y\|.$$

则$X\times Y$也是一个Banach空间。

因为A是线性映射，显然G是一个线性空间，又由假设知G是闭的，所以G是一个Banach空间。

定义$G\to X$的映射p：

$$p(x,Ax)=x.$$

即 p 为 G 到 X 上的投影算子．显然 p 是线性连续的，且为 G 到 X 上的1-1映射，由开映象定理知，其逆映射

$$p^{-1}: X \to G$$

是连续的。

再定义 $X \times Y \to Y$ 的映射 q：

$$q(x,y) = y,$$

q 也是线性连续的。故映射

$$q_0 p^{-1}: X \to Y$$

也是连续的。但 $A = q_0 p^{-1}$。所以 A 是连续的，证毕。

注 常常以下述事实检验图象 G 是否是闭的。

设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列，若当

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} A x_n = y$$

存在时，必有 $Ax = y$；则线性映射 A 的图象 G 必是闭的。

证 令 (x, y) 是 G 的一个极限点，则在 G 中必有序列 (x_n, Ax_n) 以 (x,y) 为极限，即有序列 $\{x_n\}$

使 $$\lim_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (x, y).$$

因此有 $$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = y,$$

由假设有 $y = Ax$，即 $(x,y) \in G$，所以 G 是闭的。

定理23 A 是可交换的 B-代数，具有单元和对合，若 A 是半单纯的，则 $x \to x^*$ 是连续的。

证 对合映射 $x \to x^*$ 是共轭线性的。为利用闭图象定理证明 $x \to x^*$ 的连续性，先看以下事实。

设 $A: X \to Y$ 是共轭线性映射．由 Y 作空间 Y_1，使 Y_1 和 Y 作为集合是相同的，即所含元素是相同的．在 Y_1 中定义加法和数乘：

$$y+z|_{在Y_1中} = y+z|_{在Y中}, \quad \forall y,z \in Y,$$

$$\alpha \cdot y|_{在Y_1中} = \overline{\alpha} \cdot y|_{在Y中}, \quad \forall y \in Y, \alpha \in \mathbf{C}.$$

且定义范数 $\|y\||_{Y_1} = \|y\||_Y$．则可将 A 看成 X 到 Y_1 的映射，且

为线性的．若$\Lambda: X\to Y_1$是连续映射，由Y和Y_1上的范数定义知，$\Lambda: X\to Y$也是连续的。

按以上讨论，可将对合映射$x\to x^*$看成线性映射．为证其连续性，只需证明其图象$\{(x,\ x^*)\}$在$A\times A$中是闭的．利用定理22的注知，只需证明当$x_n\to x$，$x_n^*\to y$时，有$y=x^*$．

设Δ是A的极大理想空间，$\varphi\in\Delta$，定义$A\to C$的映射ψ为：

$$\psi(x)=\overline{\varphi(x^*)}\ .$$

则必有$\psi\in\Delta$．事实上，

$$\psi(x+y)=\overline{\varphi((x+y)^*)}=\overline{\varphi(x^*)+\varphi(y^*)}=\overline{\varphi(x^*)}+\overline{\varphi(y^*)}$$
$$=\psi(x)+\psi(y).$$

$$\psi(ax)=\overline{\varphi((ax)^*)}=\overline{\varphi(\overline{a}x^*)}=\overline{\overline{a}\varphi(x^*)}$$
$$=a\overline{\varphi(x^*)}=a\psi(x).$$

$$\psi(xy)=\overline{\varphi((xy)^*)}=\overline{\varphi(y^*x^*)}=\overline{\varphi(y^*)}\ \overline{\varphi(x^*)}=\psi(x)\psi(y)$$

设$x_n\to x$，$x_n^*\to y$．由ψ的连续性知$\psi(x_n)\to\psi(x)$．即$\overline{\varphi(x_n^*)}\to\overline{\varphi(x^*)}$．所以$\varphi(x_n^*)\to\varphi(x^*)$．

又由于$x_n^*\to y$，φ为连续的。故$\varphi(x_n^*)\to\varphi(y)$，所以得到

$$\varphi(x^*)=\varphi(y),\ \forall\varphi\in\Delta.$$

也就是$\varphi(x^*-y)=0$对一切$\varphi\in\Delta$成立。即

$$(x^*\widehat{-}y)(\varphi)=0,\ \forall\varphi\in\Delta.$$

所以x^*-y在Gelfand变换的核内．由假设A是半单纯的，即A的根$R=\bigcup\limits_{M\in\mathcal{A}}M=\{0\}$，也就是Gelfand变换的核：$R=\{x\,|\,\widehat{x}=0\}=0$．所以

$$x^*=y.$$

由闭图象定理知，$x\to x^*$是连续的．定理得证。

在具有对合的Banach代数中，常常要研究元素x的平方根．下面的定理给出在什么条件下，一个自共轭元素将有自共轭的平方根。

定理24 A是可交换的B-代数，具有单元和对合。若$x\in A$且$x=x^*$，$\sigma(x)$不含非正的实数，则存在$y\in A$使$y^2=x$且$y=y^*$.

证 分两步证明.

（1）首先就A是半单纯的情形证明定理。由定理23知，此时对合映射$x\to x^*$是连续的.

令开集$\Omega=\boldsymbol{C}\setminus(-\infty,0]$. 由假设$\sigma(x)\cap(-\infty,0]=\phi$，故$\sigma(x)\subset\Omega$. 取解析函数$f\in H(\Omega)$使$f^2(\lambda)=\lambda$，且$f(1)=1$，于是可以定义向量值函数

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}\mathrm{d}x,$$

其中Γ是Ω中环绕$\sigma(x)$的围道.

令$y=\widetilde{f}(x)$. 则$y^2=(\widetilde{f}(x))^2=(\widetilde{f}^2)(x)$. 因为$f^2(\lambda)=\lambda$，故$(\widetilde{f}^2)(x)=x$. 所以$y^2=x$.

根据Runge定理知，在Ω的紧子集上有多项式序列$\{P_n(\lambda)\}$一致收敛于$f(\lambda)$。令

$$q_n(\lambda)=\frac{1}{2}(p_n(\lambda)+\overline{p_n(\overline{\lambda})}),$$

则$q_n(\lambda)$的系数皆为实数. 又由于$f(\overline{\lambda})=\overline{f(\lambda)}$，故由$p_n(\lambda)$一致收敛于$f(\lambda)$知$q_n(\lambda)$在$\Omega$的紧子集上一致收敛于$f(\lambda)$.

$q_n(\lambda)$是多项式，所以$q_n(x)=\widetilde{q}_n(x)$. 故$\widetilde{q}_n(x)$收敛于$\widetilde{f}(x)=y$。又对合是连续的，故由$q_n(x)\to y$推出$q_n(x)^*\to y^*$. $q_n(x)$的系数是实数，$x^*=x$. 故$q_n(x)^*=q_n(x)$. 因此由$q_n(x)\to y$，$q_n(x)^*\to y^*$得到$y=y^*$.

若x的谱是正实数，则其平方根y的谱也是正实数。事实上，由第三章谱映射定理，有

$$\sigma(y)=\sigma(\widetilde{f}(x))=f(\sigma(x))\subset f((0,\infty))\subset(0,\infty).$$

（2）再考虑A不是半单纯的情形，这时不能保证对合的连续性。为证明定理的结论引入对称理想概念.

若I是A中的一个理想，$x\in I$，则有$x^*\in I$，这时称I为对称理想。如果A中有对合，I是闭的对称真理想，则可将映射$x\to x^*$引到A/I中。即在A/I中定义对合：

$$(\dot{x})^*=(\dot{x^*}).$$

由于I是对称的，以上定义是有意义的。事实上，若$\dot{x}=\dot{y}$，则$(\dot{x})^*=(\dot{y})^*$。因为若$\dot{x}=\dot{y}$，则$x-y\in I$，I是对称的，所以$(y-x)^*=y^*-x^*\in I$。即$(\dot{y})^*=(\dot{x})^*$。

因为A的根R是对称的，故A/R上可引入对合，且显然A/R是半单纯的（读者自己证明），因而对合映射$\dot{x}\to(\dot{x})^*$是连续的。

在A中若有$y_n\to y$，由于$\pi: A\to A/R$是连续的，相应地在商代数A/R中有$\dot{y}_n\to\dot{y}$。由对合的连续性有$(\dot{y}_n)^*\to(\dot{y})^*$。又$y_n=q_n(x)$是自共轭的，即$y_n^*=y_n$，所以$\dot{y}=(\dot{y^*})$，即$y-y^*\in R$。于是对每一个非零代数同态$\varphi$，有$\varphi(y-y^*)=0$。

记$y=u+iv$，其中$u=u^*$，$v=v^*$，则$y^*=u-iv$，现在证明$v=0$。注意到$y^2=x=u^2-v^2+2iuv$，而$x=x^*$，所以$uv=0$，即$y^2=u^2-v^2$。又$y-y^*=2iv$。故对一切$\varphi\in\varDelta$有$\varphi(v)=0$。所以$\varphi(y^2)=\varphi(u^2)-\varphi(v^2)=\varphi(u^2)$。又$\varphi(y^2)=\varphi(x)\neq 0$。这是因为$\varphi(x)$即$\hat{x}(\varphi)$的值域$\sigma(x)$不包含0。故$\varphi(u^2)=(\varphi(u))^2\neq 0$。即对一切$\varphi\in\varDelta$，$\varphi(u)\neq 0$。也就是$u$不属于任何极大理想，故$u^{-1}$存在。又$v=u^{-1}(uv)=0$。所以$y=y^*$。定理得证。

在以上定理中，若将A是可交换的这个条件去掉，定理仍然成立。下面讨论这个问题。

定义 9 若A是B-代数，具有单元和对合，若$x\in A$且$xx^*=x^*x$，则称x为正规的。若$S\subset A$满足

（1）S可交换，即$st=ts$，$\forall s,t\in S$，

（2）$S^*=S$。即若$s\in S$，则$s^*\in S$，

则称S是A的正规子集。若$B\subset A$满足

（1）B是正规子集。

（2）若$C\subset A$是正规的，且$C\supset B$，必有$C=B$，

则称B为A的极大正规子集。

定理25 A是B-代数，具有单元和对合，B是A的极大正规子集，则

（1）B是A的闭的可交换的子代数。

（2）对于一切$x\in B$，$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$。

证 （1）首先证明以下事实：

若$x\in A$满足$xx^*=x^*x$，且对一切$y\in B$有$xy=yx$，则$x\in B$。

若$y\in B$，则$y^*\in B$。由假设$xy=yx$，$xy^*=y^*x$，又$x^*y=(y^*x)^*$，所以$x^*y=(xy^*)^*=yx^*$。

令$C=B\cup\{x,x^*\}$，由以上假设和讨论知C中任何两个元素可交换，且显然$C^*=C$，所以C是A的正规子集，又B是A的极大正规子集，$C\supset B$，所以$C=B$。即$x\in B$。

再证B是子代数。

若$x,z\in B$，证明$x+z\in B$。

$(x+z)y=xy+zy=yx+yz=y(x+z)$，$\forall y\in B$。

$$(x+z)^*(x+z)=x^*x+z^*x+x^*z+z^*z=xx^*+xz^*+zx^*+zz^*$$
$$=(x+z)(x+z)^*$$

由前知$x+z\in B$。同理可证$\alpha x\in B$，$\forall\alpha\in\mathbf{C}$，且$xz\in B$，故$B$是子代数。

最后证明B是闭的。

设$x_n\in B$，且$x_n\to x$，今证$x\in B$。仍利用(1)中已证事实。因为对一切$y\in B$，有$x_ny=yx_n$，所以$xy=yx$。又在上面已证明此时有$x^*y=yx^*$。今取$y=x_n$，得$x^*x_n=x_nx^*$。令$n\to\infty$得$x^*x=xx^*$。由此知$x\in B$，故B是闭的。结论（1）得证。

（2）B是A的子代数，由谱半径公式$\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$知$\rho_A(x)=\rho_B(x)$。现要证明$\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$。因为

$$\sigma_A(x)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid x-\lambda e\text{在}A\text{中不可逆}\}.$$
$$\sigma_B(x)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid x-\lambda e\text{在}B\text{中不可逆}\}.$$

$B\subset A$。显然$\sigma_B(x)\supset\sigma_A(x)$。

为证明$\sigma_A(x)\supset\sigma_B(x)$。需证若$y\in B$且$y^{-1}\in A$，则必有$y^{-1}\in B$。仍利用(1)中已证事实证明。

因为$yy^*=y^*y$，且由$e^*=ee^*$，得$e=ee^*$。所以$e=e^*$。又

$$y^*(y^{-1})^*=(y^{-1}y)^*=e^*=e,$$

得$(y^*)^{-1}=(y^{-1})^*$，所以

$$y^{-1}(y^{-1})^*=y^{-1}(y^*)^{-1}=(y^*y)^{-1}=(yy^*)^{-1}=(y^{-1})^*y^{-1}.$$

对一切$z\in B$，有$yz=zy$，所以，$z=zyy^{-1}=yzy^{-1}$，即$y^{-1}z=zy^{-1}$。由(1)知$y^{-1}\in B$。

以上事实说明，若$y\in B$且在A中可逆，则必在B中可逆。即若$\lambda\notin\sigma_A(x)$，则$\lambda\notin\sigma_B(x)$，即$\sigma_A(x)\supset\sigma_B(x)$。(2)得证。

定理26 A是B-代数，具有单元和对合，若$x\in A$且$x=x^*$，$\sigma(x)$不含非正实数，则存在$y\in A$使$y^2=x$且$y^*=y$。

证 $x\in A$且$x=x^*$，作A的所有包含x的正规子集合，构成集合$\mathscr{M}$：

$$\mathscr{M}=\{M|\ x\in M,\ M是A的正规子集合\}。$$

按集合的包含关系，$\mathscr{M}$为一个半序集，在$\mathscr{M}$中任取一个链$\{M_\alpha\}$，作$\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$，显然$\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$仍为$A$的正规子集合，且$\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$为$\{M_\alpha\}$的上界。由Zorn引理知$\mathscr{M}$必有一个极大元$B$。则$B$就是$A$的包含$x$的极大正规子集合。由定理25知$B$是可交换的$B$-代数，且$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$。所以$B$满足定理24的条件。所以存在$y\in B$，使$y^2=x$且$y=y^*$。定理得证。

顺便指出，在一定的条件下，对于A的子代数B有$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$，这比谱半径$\rho_A(x)=\rho_B(x)$更有用。若不可交换的B-代数中包含着一个可交换的子代数，保持谱不变，往往可使在可交换的B-代数中得到的结论，在不可交换的B-代数上也成立。

§ 4.8 不可交换的Banach代数

由前可知若在具有对合的不可交换的B-代数A中，可以作A的极大正规子集合B，则B是一个可交换的子代数。本节研究在没有对合的情况下，对不可交换的B-代数，如何作出一个可交换的子代数。

定义10 A是B-代数，具有单元，S是A的子集，作

$$\Gamma(S)=\{x\in A \mid xs=sx,\ \forall s\in S\},$$

称$\Gamma(S)$为S的换位子(*commutant*)或中心化子(*centralizer*)。

定理27 A是B-代数，具有单元，$S\subset A$且S可交换，则

(1) $B=\Gamma(\Gamma(S))$是A的可交换的子代数，且$B\supset S$。

(2) $\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$，$\forall x\in B$。

证 (1)首先证明对A的任意子集S，$\Gamma(S)$是A的闭子代数。

若x，$y\in\Gamma(S)$，对任意的$s\in S$，有

$$(x+y)s=xs+ys=sx+sy=s(x+y),$$

$$(xy)s=x(ys)=x(sy)=(xs)y=s(xy),$$

$$(\alpha x)s=\alpha(xs)=\alpha(sx)=s(\alpha x),$$

所以$x+y\in\Gamma(S)$，$xy\in\Gamma(S)$，$\alpha x\in\Gamma(S)$。

若$x_n\in\Gamma(S)$，且$x_n\to x(n\to\infty)$，由$x_ns=sx_n$，得$xs=sx$。所以$x\in\Gamma(S)$。

因此$\Gamma(S)$是A的闭子代数，又$\Gamma(S)\subset A$，所以$\Gamma(\Gamma(S))$也是A的闭子代数。

再设S是可交换的，证明$\Gamma(\Gamma(S))$可交换。

因S可交换，由$\Gamma(S)$的定义知$S\subset\Gamma(S)$。又$\Gamma(\Gamma(S))$中的元素和$\Gamma(S)$中的元素可交换，故一定和S中的元素可交换，所以$\Gamma(S)\supset\Gamma(\Gamma(S))$。

令$C=\Gamma(S)$，则$C\supset\Gamma(C)$。设x，$y\in\Gamma(C)$，则$y\in C$。由$\Gamma(C)$的定义知，$x\in\Gamma(C)$则$xy=yx$。这说明$\Gamma(C)=\Gamma(\Gamma(S))=B$是可

交换的，且显然$B\supset S$.

（1）得证。

（2）与定理25中（2）的证明相同，为证（2），只需证明，若$y\in B$，$y^{-1}\in A$，则$y^{-1}\in B=\Gamma(\Gamma(S))$.

为此只需证明y^{-1}和$\Gamma(S)$中的元素可交换．由$y\in B$知，对一切$z\in\Gamma(S)$有$yz=zy$. 又$z=y^{-1}yz=y^{-1}zy$，所以$zy^{-1}=y^{-1}z$. 即$y^{-1}\in B$. 故$\sigma_A(x)=\sigma_B(x)$. 定理得证.

例 设A是B-代数，具有单元和对合，设$x\in A$是正规的，即$xx^*=x^*x$，取$S=\{x, x^*\}$，则S是可交换的，按定理26的证明中提到的方法，可作包含S的极大正规子集合B，则B是A的一个可交换的闭子代数。按定理27也可作$\widetilde{B}=\Gamma(\Gamma(S))$，也是$A$的一个可交换的闭子代数，由$\Gamma(\Gamma(S))$的定义显然$\widetilde{B}\supset S$. 容易证明$\widetilde{B}^*=\widetilde{B}$. 即$\widetilde{B}$也是$A$的正规子集合.

由$S^*=S$，证明$\Gamma(S)=\Gamma(S)^*$. 事实上$x, x^*\in S$，若$y\in\Gamma(S)$，则$xy=yx$，$x^*y=yx^*$. 所以$y^*x=(x^*y)^*=(yx^*)^*=xy^*$，且$y^*x^*=(xy)^*=(yx)^*=x^*y^*$，这表明$y^*\in\Gamma(S)$，故$\Gamma(S)=\Gamma(S)^*$. 因此也有$\Gamma(\Gamma(S))=\Gamma(\Gamma(S))^*$. 即$\widetilde{B}$也是$A$的正规子集合，但不一定为极大的.

定理28 设A是B-代数，具有单元，$x, y\in A$，且$xy=yx$，则

$$\sigma(x+y)\subset\sigma(x)+\sigma(y),$$
$$\sigma(xy)\subset\sigma(x)\sigma(y).$$

证 令$S=\{x, y\}$，$B=\Gamma(\Gamma(S))$，由定理27知

$$\sigma_B(z)=\sigma_A(z),\ \forall z\in B.$$

所以$\sigma(x+y)=\sigma_A(x+y)=\sigma_B(x+y)$，$\sigma(xy)=\sigma_A(xy)=\sigma_B(xy)$.
因此只需证明

$$\sigma_B(x+y)\subset\sigma_B(x)+\sigma_B(y),$$
$$\sigma_B(xy)\subset\sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

由于B是可交换的B-代数，$\sigma_B(z)$就是Gelfand变换$\hat{z}$的值域．又

$$(x+y)^{\wedge}=\hat{x}+\hat{y}, \quad (xy)^{\wedge}=\hat{x}\,\hat{y},$$

所以立即得出所要结论。

推论 2 若A是B-代数，具有单元. L_x和R_x分别表示用x左乘和右乘A中的元素，即L_x, $R_x \in B(A)$, $R_x y=yx$, $L_x y=xy$. 令$C_x=R_x-L_x$, 则$\sigma(C_x)\subset\sigma(x)-\sigma(x)$。

证 容易验证，在$B(A)$中$R_x(-L_x)=-L_x R_x$，由以上定理得$\sigma(C_x)\subset\sigma(R_x)-\sigma(L_x)$. 但$\sigma(R_x)=\sigma(x)=\sigma(L_x)$(读者自己证明)，即得所证。

定理29 A是具有单元e的B-代数，B是A的闭子代数，$e\in B$，若对于一切$x\in B$, $\Omega_A=\boldsymbol{C}\setminus\sigma_A(x)$是连通的，则$\sigma_B(x)=\sigma_A(x)$。

证 $B\subset A$, 故$\sigma_B(x)\supset\sigma_A(x)$. 令$\Omega_B=\boldsymbol{C}\setminus\sigma_B(x)$，则$\Omega_B\subset\Omega_A$. $\sigma_A(x)$, $\sigma_B(x)$都是$\boldsymbol{C}$上的非空紧集，所以Ω_A、Ω_B是开集. 又$\Omega_A\cap\Omega_B$是非空开集，$\Omega_A\cap\overline{\Omega}_B^{\,c}$是开集，且$\Omega_A\cap\Omega_B\subset\Omega_B$, $\Omega_A\cap\overline{\Omega}_B^{\,c}\subset\overline{\Omega}_B^{\,c}$，故

$$(\Omega_A\cap\Omega_B)\cap(\Omega_A\cap\overline{\Omega}_B^{\,c})=\phi. \tag{12}$$

下面证明

$$\Omega_A=(\Omega_A\cap\Omega_B)\cup(\Omega_A\cap\overline{\Omega}_B^{\,c}). \tag{13}$$

因为 $\Omega_A=(\Omega_A\cap\Omega_B)\cup(\Omega_A\cap\overline{\Omega}_B^{\,c})\cup(\Omega_A\cap(\overline{\Omega}_B-\Omega_B))$,

记 $\delta\Omega_B=\overline{\Omega}_B-\Omega_B$. 只需证明

$$\delta\Omega_B\cap\Omega_A=\phi \tag{14}$$

成立。取$\lambda\in\delta\Omega_B$，则存在$\lambda_n\in\Omega_B$，使得$\lambda_n\to\lambda$，由$\lambda_n\in\Omega_B$得$x-\lambda_n e\in G_B$. 因$\lambda\notin\Omega_B$（Ω_B为开集）。从而$x-\lambda e\notin G_B$. 但$x-\lambda_n e\to x-\lambda e$. 所以$x-\lambda e\in\delta G_B$（$G_B$的边界）. 若能证明

$$\delta G_B\cap G_A=\phi \tag{15}$$

成立，则由$x-\lambda e\in\delta G_B$得$x-\lambda e\notin G_A$，从而$x-\lambda e\in\sigma_A(x)$。即$\lambda\notin\Omega_A$. 即(14)式成立。

现证(15)式成立．用反证法．取$y\in\delta G_B\cap G_A$．由于$y\in\delta G_B$知存在$y_n\in G_B$使得$y_n\to y$．因为y_n^{-1}、y^{-1}存在及映射$y\to y^{-1}$的连续性，知$y_n^{-1}\to y^{-1}$．故$\{\|y_n^{-1}\|\,|n=1,2,\cdots\}$是有界的，又

$$e-y_n^{-1}y=y_n^{-1}(y_n-y)\to 0,$$

所以存在n，使$\|e-y_n^{-1}y\|<1$．所以$e-(e-y_n^{-1}y)\in G_B$，即$y_n^{-1}y\in G_B$．故$y=y_n(y_n^{-1}y)\in G_B$．与$y\in\delta G_B$矛盾(G_B是开集)．(15)式得证．

由(12)、(13)式及Ω_A的连通性，得

$$\Omega_A=\Omega_A\cap\Omega_B.$$

从而$\Omega_A\subset\Omega_B$，又由于$\Omega_B\subset\Omega_A$，所以$\Omega_A=\Omega_B$．定理得证．

下面利用以上事实研究B^*-代数的性质．

定义11 在具有对合的B-代数中，“$x\geqslant 0$”是指$x=x^*$，且$\sigma(x)\subset[0,\infty)$．

定理30 若A是B^*-代数，具有单元e，则A具有以下性质：

(1)若$x\in A$，$x=x^*$，则$\sigma(x)\subset\boldsymbol{R}$，

(2)若$x\in A$，$xx^*=x^*x$，则$\rho(x)=\|x\|$，

(3)若$y\in A$，则$\rho(yy^*)=\|y\|^2$，

(4)若$u\in A$，$v\in A$，$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，则$u+v\geqslant 0$，

(5)若$y\in A$，则$yy^*\geqslant 0$，

(6)若$y\in A$，则$e+yy^*\in G_A$．

证 (1)$x\in A, x=x^*$，则$xx^*=x^*x$．可作A的包含$S=\{x,x^*\}$的极大正规子集B，由定理25知B是可交换的B^*-代数，且对一切$y\in B$有$\sigma_B(y)=\sigma_A(y)$．再根据Gelfand-Naimark定理知，B和$\hat{B}=C(\varDelta_B)$是等距同构的，且若$x=x^*$，则$\hat{x}=\hat{x^*}=\overline{\hat{x}}$．即$\hat{x}$取实值．又$y\in B$，则

$$\sigma(y)=\sigma_A(y)=\sigma_B(y)=\hat{y}(\varDelta_B),$$

所以$\sigma(x)=\hat{x}(\varDelta_B)\subset\boldsymbol{R}$，(1)得证．

(2)$\rho(x)=\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\sigma(x)\}$，

又$xx^* = x^*x$，$\sigma(x) = \hat{x}(\Delta_B)$，所以$\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$，又$B$与$\hat{B}$是等距的，$\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|_\infty$，得$\rho(x) = \|x\|$。

（3）对一切$y \in A$，yy^*是自共轭的，根据（2）得$\rho(yy^*) = \|yy^*\|$，又A是B^*-代数，得$\rho(yy^*) = \|y\|^2$。

（4）因为$(u+v)^* = u^* + v^* = u+v$，所以$u+v$是自共轭的。现只需证明$\sigma(u+v) \subset [0, \infty)$。

记$\alpha = \|u\|$，$\beta = \|v\|$，由$u \geqslant 0$知$\sigma(u) \subset [0, \infty)$，又若$\lambda \in \sigma(u)$，则$|\lambda| \leqslant \|u\|$，所以$\sigma(u) \subset [0, \alpha]$。注意到$\alpha e$与$u$是可交换的，所以

$$\sigma(\alpha e - u) \subset \sigma(\alpha e) + \sigma(-u) \subset [0, \alpha].$$

由（2）得 $\rho(\alpha e - u) = \|\alpha e - u\| \leqslant \alpha.$

同理有 $\rho(\beta e - v) = \|\beta e - v\| \leqslant \beta.$

令$\gamma = \alpha + \beta$，$w = u + v$，因

$$\gamma e - w = \alpha e - u + \beta e - v，所以$$

$$\|\gamma e - w\| \leqslant \|\alpha e - u\| + \|\beta e - v\| \leqslant \alpha + \beta = \gamma.$$

由此知 $\sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma]$.

$$\sigma(w) = \sigma(\gamma e - (\gamma e - w)) \subset \sigma(\gamma e) - \sigma(\gamma e - w) \subset [0, 2\gamma],$$

所以 $$w = u + v \geqslant 0.$$

（5）首先证明以下事实：若A是B一代数，$x \in A$，$y \in A$，则$\sigma(yx) \subset \sigma(xy) \cup \{0\}$.

为此只需证明当$\lambda \neq 0$时$\lambda \in \sigma(yx) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma(xy)$即可。

若存在z使得$(e - xy)z = z(e - xy) = e$，则

$$(e - yx)(e + yzx) = (e + yzx)(e - yx) = e.$$

事实上，

$$(e - yx)(e + yzx) = e - yx + y(zx - xyzx)$$
$$= e - yx + y(e - xy)zx = e.$$
$$(e + yzx)(e - yx) = e - yx + y(zx - zxyx)$$
$$= e - yx + yz(e - xy)x = e.$$

以上说明　$e-xy\in G_A\Longleftrightarrow e-yx\in G_A$.

若$\lambda\neq 0$，$\lambda\in\sigma(yx)\Longleftrightarrow\lambda e-yx\notin G_A$

$$\Longleftrightarrow\lambda\left(e-\frac{1}{\lambda}yx\right)\notin G_A$$

$$\Longleftrightarrow\lambda\left(e-\frac{1}{\lambda}xy\right)\notin G_A\Longleftrightarrow\lambda\in\sigma(xy).$$

现在证明$y\in A$，则$yy^*\geqslant 0$.

记$x=yy^*$. 显然$x=x^*$，故可作A的包含x的极大正规子集B，则$\hat{x}$是Δ_B上的实值函数. 由

$$\sigma(x)=\sigma_B(x)=\hat{x}(\Delta_B)$$

知，只需证明在Δ_B上$\hat{x}\geqslant 0$.

因为$\hat{B}=C(\Delta_B)$，所以存在$z\in B$使得$\hat{z}=|\hat{x}|-\hat{x}$，又$\widehat{z^*}=\overline{\hat{z}}=\hat{z}$，得$z=z^*$.

令$w=zy=u+iv$，其中$u=u^*$，$v=v^*$，则$w^*=u-iv$，$w^*w=u^2+iuv-ivu+v^2$，$ww^*=u^2-iuv+ivu+v^2$.

于是　$w^*w+ww^*=2u^2+2v^2$.

由第三章§3.9谱映射定理知

$$\sigma(u^2)=(\sigma(u))^2\subset[0,\infty),$$

且$(u^2)^*=u^2$，得$u^2\geqslant 0$. 同理$v^2\geqslant 0$. 所以$2u^2+2v^2\geqslant 0$.

$$ww^*=(zy)(zy)^*=zyy^*z=zxz.$$

又$z\in B$，$x\in B$. 故z与x可交换，所以

$$ww^*=z^2x.$$

又z与x都是自共轭的，所以z^2x是自共轭的，

$$\widehat{z^2x}=(\hat{z})^2\hat{x}=(|\hat{x}|-\hat{x})^2\hat{x}\leqslant 0.$$

事实上，若$\hat{x}\leqslant 0$，上式显然，若$\hat{x}>0$，则$|\hat{x}|-\hat{x}=0$. 于是得到$-z^2x\geqslant 0$.

由(4)得$w^*w=2u^2+2v^2+(-z^2x)\geqslant 0$. 又由于

$$\sigma(ww^*)\subset\sigma(w^*w)\cup\{0\}\subset[0,\infty),$$

所以$ww^*\geqslant 0$, 即$z^2x\geqslant 0$, 所以$\widehat{z^2x}\geqslant 0$, 即$(\hat{z})^2\hat{x}\geqslant 0$. 所以$\hat{x}\geqslant 0$. (5)得证。

(6)由(5)知$\sigma(yy^*)\subset[0,\infty)$, 故$-1\notin\sigma(yy^*)$, 所以$e+yy^*\in G_A$. 证毕。

定理31 设A是B^*—代数,具有单元e,B是A的闭$*$—子代数,$e\in B$, 则对一切$y\in B$有

$$\sigma_B(y)=\sigma_A(y).$$

证 只需证明$x\in B,x^{-1}\in A$,则$x^{-1}\in B$. $x^{-1}\in A$, 即$x\in G_A$. 又$(x^*)^{-1}=(x^{-1})^*$, 所以$x^*\in G_A$. 于是$xx^*\in G_A$. 由xx^*的自共轭性知$\sigma_A(xx^*)\subset[0,\infty)$. 又由$xx^*$的可逆性知, $0\notin\sigma_A(xx^*)$. 故$\sigma_A(xx^*)\subset(0,\infty)$. 所以$\Omega=\mathbf{C}-\sigma_A(xx^*)$是单连通的, 由定理29知$\sigma_A(xx^*)=\sigma_B(xx^*)$. 这表明$xx^*\in G_B$. 所以$(xx^*)^{-1}\in B$, 于是$x^{-1}=x^*(xx^*)^{-1}\in B$. 定理得证。

§4.9 正泛函

定义12 A是B–代数, 具有单元和对合,F是A上的线性泛函, 若对一切$x\in A$有$F(xx^*)\geqslant 0$, 则称F为正泛函.

定理32 A是B–代数, 具有单元$e(\|e\|=1)$和对合. 则A上的正泛函F具有以下性质:

(1) $F(x^*)=\overline{F(x)}$,

(2) $|F(xy^*)|^2\leqslant F(xx^*)F(yy^*)$,

(3) $|F(x)|^2\leqslant F(e)F(xx^*)\leqslant F(e)^2\rho(xx^*)$,

(4)若$xx^*=x^*x$, 则$|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x)$.

(5)F是A上的有界线性泛函.

证 (1)若x, $y\in A$, $\alpha\in\mathbf{C}$, 则

$$0\leqslant F((x+\alpha y)(x^*+\bar{\alpha}y^*))=F(xx^*+\bar{\alpha}xy^*+\alpha yx^*+|\alpha|^2yy^*).$$

令$p=F(xx^*)$，$q=F(yy^*)$，$r=F(xy^*)$，$s=F(yx^*)$．则得

$$p+\bar{\alpha}r+\alpha s+|\alpha|^2q\geqslant 0. \tag{16}$$

取$\alpha=1$，得$p+r+s+q\geqslant 0$，又$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，所以$r+s\in R$。

取$\alpha=\mathrm{i}$得$p-\mathrm{i}r+\mathrm{i}s+q\geqslant 0$，所以$\mathrm{i}(-r+s)\in R$。设$r=a+b\mathrm{i}$，$s=c+d\mathrm{i}$．由以上结论得

$$b+d=0,\quad -a+c=0.$$

即$s=\bar{r}$，再取$y=1$，即得

$$F(x^*)=\overline{F(x)}.$$

(2)若$r=F(xy^*)=0$，则(2)显然成立．若$r\neq 0$，取$\alpha=\frac{tr}{|r|}$，$t\in\boldsymbol{R}$，代入(16)式，得$p+2t|r|+t^2q\geqslant 0$对任何$t\in\boldsymbol{R}$成立。故$|r|^2-pq\leqslant 0$，即得(2)的结论。

(3)在(2)中取$y=e$，得

$$|F(x)|^2\leqslant F(e)F(xx^*).$$

为证第二个不等式，令$t>\rho(xx^*)$．显然$te-xx^*\in A$是自共轭的，且te和xx^*可交换，利用定理28，得$\sigma(te-xx^*)\subset\sigma(te)-\sigma(xx^*)$。因为$\sigma(te)=t$，$\rho(xx^*)<t$，所以$\sigma(te-xx^*)$含于右半开平面，由定理26知，存在$u\in A$，使$u=u^*$且$u^2=te-xx^*$，所以

$$0\leqslant F(uu^*)=F(u^2)=tF(e)-F(xx^*),$$

即
$$F(xx^*)\leqslant tF(e)$$

对一切$t>\rho(xx^*)$成立。所以

$$F(xx^*)\leqslant F(e)\rho(xx^*).$$

(4)$xx^*=x^*x$．由定理28知$\sigma(xx^*)\subset\sigma(x)\sigma(x^*)$，于是$\rho(xx^*)\leqslant\rho(x)\rho(x^*)$．又$\lambda\in\sigma(x)$当且仅当$\bar{\lambda}\in\sigma(x^*)$，故$\rho(x^*)=\rho(x)$．由(3)得

$$|F(x)|^2\leqslant F(e)^2\rho(xx^*)\leqslant F(e)^2\rho(x)^2.$$

即
$$|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x).$$

(5)令$A_r=\{x\in A\,|x=x^*\}$，因A中有对合，故任给$x\in A$，有

$x=u+\mathrm{i}v$，其中$u=u^*$，$v=v^*$. 所以$A=A_r+\mathrm{i}A_r$. 易见A_r和$\mathrm{i}A_r$是实数域上的线性空间.

令　$Y=\overline{A_r}\times\mathrm{i}\overline{A_r}$，在其上定义范数：

$$\|(a,\ \mathrm{i}b)\|=\|a\|+\|b\|.$$

则Y为一个Banach空间. 将A也看成实数域上的线性空间，定义映射Λ：$Y\to A$如下.

$$\Lambda(a,\ \mathrm{i}b)=a+\mathrm{i}b,$$

则Λ是Y到A上的线性连续映射. 由开映象定理，存在$\delta>0$，当$\|x\|<\delta$，存在$(u,\ \mathrm{i}v)\in Y$，使得$\Lambda(u,\ \mathrm{i}v)=x$，且$\|(u,\ \mathrm{i}v)\|\leqslant 1$. 即

$$x=u+\mathrm{i}v,\ \text{且}\ \|u\|+\|v\|\leqslant 1.$$

任取$x\in A$，$x\neq 0$，考虑$\frac{\delta}{\|x\|}x$，则存在x_1，$x_2\in\overline{A_r}$，使得$\frac{\delta}{\|x\|}x=x_1+\mathrm{i}x_2$，且$\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant 1$. 即

$$x=\frac{\|x\|}{\delta}x_1+\mathrm{i}\frac{\|x\|}{\delta}x_2=u+\mathrm{i}v,$$

且　　$$\|u\|+\|v\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|x\|.$$

令$\frac{1}{\delta}=\gamma$. 以上结论归纳为：

存在$\gamma>0$，使得A中的每个元素x都可以表示为

$$x=x_1+ix_2,$$

其中x_1，$x_2\in\overline{A_r}$，且$\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant\gamma\|x\|$.

先证明泛函F的有界性. 若$F(e)=0$，则由(3)知，对一切$x\in A$有$F(x)=0$. 故F有界. 因此我们假设$F(e)\neq 0$. 不失一般性，不妨假设$F(e)=1$. 今将F限制在A_r上，记为$F|_{A_r}$. 由于A_r中的元素是正规的，由(4)知

$$|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x)\leqslant F(e)\|x\|.$$

所以$\|F|_{A_r}\|\leqslant F(e)=1$，又$e\in A_r$，所以$\|F|_{A_r}\|=1$. 即$F|_{A_r}$

是范数为 1 的实线性泛函. 又A_r在$\overline{A_r}$中稠密，故可将F开拓到$\overline{A_r}$上，得到$\overline{A_r}$上的泛函Φ，且$\|\Phi\|=1$.

现在证明，若$y\in\overline{A_r}\cap i\overline{A_r}$，则$\Phi(y)=0$. 事实上，若$y\in\overline{A_r}$，则存在$u_n\in A_r$使得$u_n\to y$. 又$y\in i\overline{A_r}$，则存在$v_n\in A_r$使得$iv_n\to y$. 所以$u_n^2\to y^2$，$v_n^2\to -y^2$. 即$u_n^2+v_n^2\to 0$.

由(3)得，$0\leqslant|F(u_n)|^2\leqslant F(e)F(u_nu_n^*)=F(u_n^2)$. 又$F(v_n^2)=F(v_nv_n^*)\geqslant 0$. 所以$0\leqslant|F(u_n)|^2\leqslant F(u_n^2)\leqslant F(u_n^2+v_n^2)$. 再由(4)知，$0\leqslant|F(u_n)|^2\leqslant F(u_n^2+v_n^2)\leqslant F(e)\rho(u_n^2+v_n^2)\leqslant\|u_n^2+v_n^2\|\to 0$，

于是得到
$$\lim_{n\to\infty}F(u_n)=0.$$

又$F(u_n)=\Phi(u_n)$且$u_n\to y$. 故得$\Phi(y)=0$.

任给$x\in A$，x可表示为$x=u+iv$，$u, v\in A_r$. 另一方面，存在$x_1, x_2\in\overline{A_r}$使得$x=x_1+ix_2$且$\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant\gamma\|x\|$，即$x_1+ix_2=u+iv$. 或$x_1-u=i(v-x_2)$. 而$x_1-u\in\overline{A_r}$，$i(v-x_2)\in i\overline{A_r}$. 因此有$x_1-u\in\overline{A_r}\cap i\overline{A_r}$，$i(v-x_2)\in\overline{A_r}\cap i\overline{A_r}$. 所以$\Phi(x_1-u)=0$，$\Phi(i(v-x_2))=0$. 即
$$F(u)=\Phi(u)=\Phi(x_1),\quad F(v)=\Phi(v)=\Phi(x_2).$$
最后得到
$$\begin{aligned}|F(x)|&\leqslant|F(u)|+|F(v)|=|\Phi(x_1)|+|\Phi(x_2)|\\&\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|\leqslant\gamma\|x\|,\end{aligned}$$
故F是有界的. 定理得证.

这个定理说明，若F是正泛函，则F一定是连续的.

推论 3 若A是可交换的，则$\|F\|=F(e)$.

证 任给$x\in A$，则$xx^*=x^*x$，由上定理中结论(4)知$|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x)\leqslant F(e)\|x\|$. 又$|F(e)|=F(e)\|e\|$，所以$\|F\|=F(e)$.

推论 4 若对任意$x\in A$有$\|x^*\|\leqslant\beta\|x\|$，则$\|F\|\leqslant\beta^{1/2}F(e)$.

证 由上定理结论(3)知

$$|F(x)|^2 \leqslant F(e)^2 \rho(xx^*).$$

又$\rho(xx^*) \leqslant \|xx^*\| \leqslant \|x\| \|x^*\| \leqslant \beta \|x\|^2$. 所以$|F(x)| \leqslant F(e)\beta^{1/2}\|x\|$. 即

$$\|F\| \leqslant \beta^{1/2} F(e).$$

推论5 若A是B^*-代数，则$\|F\| = F(e)$.

证 A是B^*-代数，由定理30结论(3)知$\rho(xx^*) = \|x\|^2$. 再根据定理32结论(3)得$|F(x)|^2 \leqslant F(e)^2 \|x\|^2$. 即$|F(x)| \leqslant F(e)\|x\|$. 故$\|F\| = F(e)$.

定理33 若A是B^*-代数. 具有单元e，$z \in A$，则必存在A上的正泛函F，使得$F(e) = 1$，且$F(zz^*) = \|z\|^2$.

证 令$A_r = \{x \in A \mid x = x^*\}$，则$A_r$是实数域上的线性空间，$A_r$也称为$A$的实部.

先在A_r上作正泛函，然后再推广到A上. 令$P = \{x \in A \mid x \geqslant 0\} = \{x \in A \mid x = x^*$、且$\sigma(x) \subset [0, \infty)\}$. 显然$P \subset A_r$，且若$u \in P$，$v \in P$，$c \geqslant 0$则$u + v \in P$，$cu \in P$. 此时称$P$为一个锥形. 由定理30知，对一切$x \in A$，有$xx^* \in P$，$x^*x \in P$. 又$e \in P$. 今在$A_r$上作一个线性泛函$f$，满足$f(e) = 1$，且对一切$x \in P$，有$f(x) \geqslant 0$.

令$M_0 = [e, zz^*] = \{\alpha e + \beta zz^* \mid \alpha, \beta \in R\} \subset A_r$. 若$e$与$zz^*$线性无关，则$M_0$是二维的，否则$M_0$是一维的.

先定义f_0: $M_0 \to \boldsymbol{R}$如下：

$$f_0(\alpha e + \beta zz^*) = \alpha + \beta \|zz^*\|.$$

这样定义的f_0是有确切意义的. 事实上，若e和zz^*线性无关，则显然定义是唯一的. 若zz^*和e线性相关，则存在$c \in \boldsymbol{R}$，使得$zz^* = ce$. 若$\alpha e + \beta zz^* = \alpha' e + \beta' zz^*$，则有$\alpha + \beta c = \alpha' + \beta' c$. 故

$$f_0(\alpha e + \beta zz^*) = \alpha + \beta c = \alpha' + \beta' c = f_0(\alpha' e + \beta' zz^*).$$

显然f_0是实线性泛函，$f_0(e) = 1$，$f_0(zz^*) = \|zz^*\| = \|z\|^2$. 现在证明在$P \cap M_0$上，$f_0 \geqslant 0$. 先证明$\|zz^*\| \in \sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$. 因为$zz^* \geqslant 0$. 故$\sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$. 又$zz^*$是自共轭元素，

可作A的包含zz^*的极大正规子集B，B是可交换的$*$—子代数，所以$\sigma(zz^*)=\widehat{zz^*}(\Delta)$。由Gelfand-Naimark定理知$\|\widehat{zz^*}\|_\infty=\|zz^*\|$．又$zz^*$是紧$T_2$空间$\Delta$上的连续函数，故至少存在一个$\varphi\in\Delta$，使$\widehat{zz^*}(\varphi)$达到其极大值．即

$$\|\widehat{zz^*}(\varphi)\|=\|\widehat{zz^*}\|_\infty.$$

所以$\|zz^*\|\in\sigma(zz^*)$.

再考虑$\sigma(\alpha e+\beta zz^*)$．因为$\alpha e+\beta zz^*$是自共轭的，故$\alpha e\widehat{+}\beta zz^*$的值域就是$\sigma(\alpha e+\beta zz^*)$．又$\alpha e\widehat{+}\beta zz^*=\widehat{\alpha e}+\beta\widehat{zz^*}$．又存在$\varphi\in\Delta$使$\|\widehat{zz^*}(\varphi)\|=\|\widehat{zz^*}\|_\infty=\|zz^*\|$，所以

$$\|(\alpha\widehat{e}+\beta zz^*)\varphi\|=\alpha+\beta\|zz^*\|.$$

即$\alpha+\beta\|zz^*\|\in\sigma(\alpha e+\beta zz^*)$．这表明，若$x\in M_0$，则$f_0(x)\in\sigma(x)$．故若$x_0\in P\cap M_0$，则$f_0(x)\geqslant 0$．

现将f_0扩张到A_r上．假设f_0已扩张为实线性泛函f_1：$M_1\to\boldsymbol{R}$．即$M_0\subset M_1\subset A_r$，当$x\in M_0$有$f_1(x)=f_0(x)$，而且在$P\cap M_1$上，$f_1\geqslant 0$．若$M_1\neq A_r$，设$y\in A_r\setminus M_1$，令$M_2=\{M_1, y\}=\{x+\alpha y|x\in M_1,\alpha\in\boldsymbol{R}\}$，今将$f_1$扩张为$M_2$上的线性泛函$f_2$．定义$f_2$：$M_2\to\boldsymbol{R}$如下：$f_2$为线性的，$f_2(x+\alpha y)=f_2(x)+\alpha f_2(y)$．又$f_2$是$f_1$的扩张，故$f_2(x)=f_1(x)$．$y$为一固定元素，故$f_2(y)=c$．即定义$f_2(x+\alpha y)=f_1(x)+\alpha c$．现确定实数$c$，使得在$P\cap M_2$上，$f_2\geqslant 0$．

令$E'=M_1\cap(y-P)$，$E''=M_1\cap(y+P)$．取$x'\in E'$，$x''\in E''$，则$x'=y-p$，$p\in P$，$x''=y+q$，$q\in P$．又P是锥，故$(y-x')+(x''-y)=p+q=x''-x'\in P$．又$x'$，$x''\in M_1$，而$M_1$是子空间，故$x''-x'\in M_1$，所以$x''-x'\in P\cap M_1$．因此$f_1(x''-x')\geqslant 0$，即$f_1(x')\leqslant f_1(x'')$．这意味着，$x'\in E'$．$f_1(x')$有上界，$x''\in E''$，$f_1(x'')$有下界，且$\sup\limits_{x'\in E'} f(x')\leqslant\inf\limits_{x''\in E''} f(x'')$．故存在$c\in\boldsymbol{R}$使得

$$f_1(x')\leqslant c\leqslant f_1(x''),\ \forall x'\in E',\ x''\in E''.$$

取这个c作为$f_2(y)$的值．即定义$f_2(x+\alpha y)=f_1(x)+\alpha c$．现在证明这样定义的$f_2$，在$M_2\cap P$上一定有$f_2\geqslant 0$．若$x+y\in P$，则$-x\in$

$y-P$，故$-x\in(y-P)\cap M_1=E'$．所以$f_2(-x)=f_1(-x)\leqslant c$．即$f_2(x)\geqslant -c$．由此知

$$f_2(x+y)\geqslant -c+f_2(y)=-c+c=0.$$

若$x-y\in P$，则$x\in y+P$，故$x\in(y+P)\cap M_1=E''$．所以$f_2(x)=f_1(x)\geqslant c$．所以

$$f_2(x-y)\geqslant c-f_2(y)=c-c=0.$$

即若$x+y\in P$则$f_2(x+y)\geqslant 0$，若$x-y\in P$，则$f_2(x-y)\geqslant 0$.

任取$x+ay\in P\cap M_2$，若$a>0$，则$x+ay=a\left(\frac{1}{a}x+y\right)$，$f_2(x+ay)=af_2\left(\frac{1}{a}x+y\right)\geqslant 0$．若$a<0$，则$x+ay=-a\left(-\frac{1}{a}x-y\right)$，$f_2(x+ay)=-af_2\left(-\frac{1}{a}x-y\right)\geqslant 0$．若$a=0$，$f_2(x+ay)=f_2(x)=f_1(x)\geqslant 0$．因此，在$P\cap M_2$上，$f_2\geqslant 0$．

以上事实说明，定义在M_0上的线性泛函f_0，满足在$P\cap M_0$上$f_0\geqslant 0$，若能扩张到M_1上，而$M_1\neq A_r$．即M_1外还有元素y，则由y与M_1作成子空间M_2，必可将f_0再扩张到M_2上，得f_2，且在$P\cap M_2$上，$f_2\geqslant 0$．

再考虑f_a：$M_a\to R$，其中$M_0\subset M_a\subset A_r$．$f_a$满足以下两个条件：

$f_a|_{M_0}=f_0$，

在$P\cap M_a$上，$f_a\geqslant 0$．

研究集合$\mathscr{M}=\{f_a,M_a\}$，则按集合M_a的包含关系，$\mathscr{M}$为一半序集．在$\mathscr{M}$中任取一个链$\{f_a',M_a'\}$，令$M=\bigcup_{a'}M_a'$．由于M_a'的包含关系M仍为一子空间，则得定义在M上的线性泛函f，(f,M)即为链$\{f_a',M_a'\}$的上界．且显然泛函f满足$f|_{M_0}=f_0$，且在$P\cap M$上$f\geqslant 0$．由Zorn引理，$\mathscr{M}$必有一极大元素，于是得到定义在A_r上的实线性泛函f：$A_r\to R$使得$f|_{M_0}=f_0$，在$P\cap A_r$上$f\geqslant 0$．于

是$f(e)=f_0(e)=1$，$f(zz^*)=f_0(zz^*)=\|z\|^2$.

最后再作A上的线性泛函．若$x\in A$，则$x=u+iv$，$u,v\in A_r$．定义F：$A\to \mathbf{C}$如下：

$$F(x)=f(u)+if(v).$$

则显然F满足$F(x+y)=F(x)+F(y)$，且对$\alpha\in \mathbf{R}$有$F(\alpha x)=\alpha F(x)$．再证明$F(ix)=iF(x)$．事实上，

$$\begin{aligned}F(ix)&=F(-v+iu)=f(-v)+if(u)\\&=if(u)-f(v)=iF(x),\end{aligned}$$

即F是复数域上的线性泛函，且当$x\in P$有$F(x)=F(x+io)=f(x)\geqslant 0$．即$F$为正泛函．显然

$F(e)=f(e)=1$，$F(zz^*)=f(zz^*)=\|z\|^2$．定理得证．

定理34 A是B^*-代数，具有单元$e(\|e\|=1)$，若$u\in A$，$u\neq 0$，则存在Hilbert空间H_u及A到$B(H_u)$的同态映射T_u，满足

(1) $T_u(e)=1$，

(2) $T_u(x^*)=T_u(x)^*$，$x\in A$，

(3) $\|T_u(x)\|\leqslant\|x\|$，$x\in A$，

(4) $\|T_u(u)\|=\|u\|$．

证 由定理33知，存在A上的正泛函F，使得$F(e)=1$，$F(u^*u)=\|u\|^2$.

对于a，$b\in A$定义$\langle a,b\rangle=F(b^*a)$．显然$\langle a,b\rangle$关于$a$为线性的，关于$b$为共轭线性的，且由定理32知$\langle b,a\rangle=\overline{\langle a,b\rangle}$，故$\langle a,b\rangle$为$A$上的半内积.

令$Y=\{y\in A\,|\,\langle y,y\rangle=0\}$．易证$Y$是$A$的闭子空间．事实上，若$y_1$，$y_2\in Y$，有

$$\langle y_1+y_2,\ y_1+y_2\rangle=\langle y_1,\ y_1\rangle+\langle y_1,\ y_2\rangle+\langle y_2,\ y_1\rangle+\langle y_2,\ y_2\rangle,$$

利用定理32中(2)知

$$0\leqslant|\langle y_1,\ y_2\rangle|^2\leqslant\langle y_1,\ y_1\rangle\langle y_2,y_2\rangle=0.$$

同理$\langle y_2,\ y_1\rangle=0$．故$\langle y_1+y_2,\ y_1+y_2\rangle=0$，即$y_1+y_2\in Y$.

若$y\in Y$，$\alpha\in C$，则$\langle \alpha y, \alpha y\rangle=\overline{\alpha}\alpha\langle y, y\rangle=0$.所以$\alpha y\in Y$。再证$Y$是闭的。设$y_n\in Y$，且$y_n\to y_0$，由$\langle y_n, y_n\rangle=0$及正泛函的连续性(定理32中(5))得$y_0\in Y$。即$Y$为$A$的闭子空间。

作$A/Y=\{\dot{a}=a+Y\,|a\in A\}$. A/Y为线性空间，在其上定义内积

$$\langle \dot{a}, \dot{b}\rangle=\langle a, b\rangle=F(b^*a).$$

这样定义的内积是有意义的。事实上。若$\dot{a}=\dot{a}_1$，$\dot{b}=\dot{b}_1$，则$a_1=a+y$，$b_1=b+y'$，故

$\langle \dot{a}_1, \dot{b}_1\rangle=\langle a_1, b_1\rangle=\langle a+y, b+y'\rangle=\langle a, b\rangle+\langle a,y'\rangle+\langle y, b\rangle+\langle y, y'\rangle$.

由定理32中(2)知$\langle a, y'\rangle=\langle y, b\rangle=\langle y, y'\rangle=0$. 所以

$\langle \dot{a}_1, \dot{b}_1\rangle=\langle a, b\rangle=\langle \dot{a}, \dot{b}\rangle$.

因此A/Y是一个内积空间，其范数为$\|\dot{a}\|=F(a^*a)^{1/2}$. 将$A/Y$完备化即得我们所要的Hilbert空间$H_u$.

容易验证Y是A中的左理想，意即$x\in A$，$y\in Y$，则$xy\in Y$。事实上，$y\in Y$，则$\langle y, y\rangle=0$. 而

$0\leqslant\langle xy, xy\rangle=F(y^*x^*xy)=\langle y, y^*xy\rangle\leqslant\langle y, y\rangle\langle x^*xy, x^*xy\rangle=0$.

所以$\langle xy, xy\rangle=0$，即$xy\in Y$.

下面定义A/Y到H_u的映射. 对于每一个$x\in A$，定义$s(x)$: $A/Y\to H_u$如下：

$$s(x)\dot{a}=(\dot{xa}).$$

注意到Y是左理想，这样的定义是有意义的。因为若$\dot{a}_1=\dot{a}$，即$a_1=a+y$，$y\in Y$，则

$s(x)\dot{a}_1=(\dot{xa_1})=(x(\dot{a+y}))=(\dot{xa+xy})=(\dot{xa})=s(x)\dot{a}$.

现证明$s(x)$是有界线性算子. 容易验证$s(x)$是线性的。

$s(x)(\dot{a}+\dot{b})=(x(\dot{a+b}))=(\dot{xa})+(\dot{xb})$

$$=s(x)\dot{a}+s(x)\dot{b},$$

$$s(x)(\alpha\dot{a})=(x(\dot{\alpha a}))=\alpha(x\dot{a})=\alpha s(x)\dot{a}.$$

再证$s(x)$的有界性.

$$\|s(x)\dot{a}\|^2=\|(\dot{xa})\|^2=\langle\dot{xa},\ \dot{xa}\rangle=\langle xa,xa\rangle=F(a^*x^*xa).$$

考虑泛函 $G(x)=F(a^*xa)$, 则$G(x)$是线性的, 由$G(x^*x)=F(a^*x^*xa)=\|s(x)\dot{a}\|^2\geqslant 0$知$G(x)$是正泛函.

$$F(a^*x^*xa)=|G(x^*x)|\leqslant G(e)\|x^*x\|=G(e)\|x\|^2.$$

（根据定理32）

即 $\|s(x)\dot{a}\|^2\leqslant F(a^*a)\|x\|^2=\|\dot{a}\|^2\|x\|^2.$

所以 $\|s(x)\|\leqslant\|x\|.$

$s(x)$是$A/Y\rightarrow H_u$的有界线性算子, 由于A/Y在H_u中稠密, 故可将$s(x)$唯一地扩张为H_u到H_u的映射$T_u(x)$. 即$T_u(x)\in B(H_u)$, 且$\|T_u(x)\|\leqslant\|x\|$. 即得(3).

这样, 对每一个$x\in A$, 相应的有$T_u(x)\in B(H_u)$,且$\|T_u(x)\|\leqslant\|x\|$, 这个$x\rightarrow T_u(x)$的对应显然是代数同态.

又$T_u(e)\dot{a}=\dot{e}\dot{a}=\dot{a}$, 故$T_u(e)=I$, 即(1)得证.

再证(2). 若$\dot{a}$, $\dot{b}\in A/Y$, 则

$$\langle T_u(x^*)\dot{a},\ \dot{b}\rangle=\langle\dot{x^*a},\dot{b}\rangle=\langle x^*a,\ b\rangle=F(b^*x^*a)$$

$$=\langle a,\ xb\rangle=\langle\dot{a},\dot{xb}\rangle=\langle\dot{a},\ T_u(x)\dot{b}\rangle=\langle T_u(x)^*\dot{a},\ \dot{b}\rangle.$$

所以 $T_u(x^*)=T_u(x)^*.$

这表明$x\rightarrow T_u(x)$保持对合. 又

$$\|T_u(u)\|^2\geqslant\|T_u(u)\dot{e}\|^2=\|\dot{ue}\|^2$$

$$=\|\dot{u}\|^2=\langle u,\ u\rangle=F(u^*u)=\|u\|^2.$$

再由$\|T_u(x)\|\leqslant\|x\|$得$\|T_u(u)\|=\|u\|$. 即得(4). 定理得证.

定理35 设A是B^*-代数，具有单元$e(\|e\|=1)$，则存在一个从A到$B(H)$的闭子代数上的等距$*$—同构．其中H为适当选取的Hilbert空间．

证 令H是定理34中的所构造的Hilbert空间H_u的直和．即

$$H=\{v\in\prod_{u\in A}H_u \mid \sum_u\|\pi_u v\|^2<\infty\}.$$

其中$\pi_u v$为v在H_u上的坐标，$\|\pi_u v\|$表示H_u—范数．

在H上定义内积

$$(v_1,\ v_2)=\sum_u<\pi_u v_1,\ \pi_u v_2>,\ v_1,\ v_2\in H.$$

则
$$\|v\|=\left[\sum_u\|\pi_u v\|^2\right]^{1/2}.$$

容易验证H是Hilbert空间(读者自证)．

对每一个$x\in A$，令$T(x)$是$H\to H$映射，它在H_u上的坐标按下式定义：

$$\pi_u(T(x)v)=T_u(x)(\pi_u v),\quad v\in H.$$

其中$T_u(x)$由定理34给出．

$$\|T_u(x)(\pi_u v)\|\leqslant\|\pi_u v\|\ \|T_u(x)\|\leqslant\|\pi_u v\|\ \|x\|.$$

$$\|T(x)v\|^2=\sum_u\|\pi_u(T(x)v)\|^2$$

$$\leqslant\left(\sum_u\|\pi_u v\|^2\right)\|x\|^2=\|v\|^2\|x\|^2.$$

所以
$$\|T(x)\|\leqslant\|x\|.$$

另一方面，取$v\in H$满足

$$\pi_u v=\begin{cases}0, & u\neq x,\\ \dot{e}, & u=x\ (\dot{e}\text{ 为}H_x\text{中的单元}).\end{cases}$$

则

$$\pi_u(T(x)v)=T_u(x)(\pi_u v)=\begin{cases}0, & u\neq x,\\ T_x(x)\dot{e}, & u=x,\end{cases}$$

又 $\quad \|T_x(x)\dot{e}\|=\|\dot{xe}\|=\|\dot{x}\|=\|x\|$,

即对所取的v有$\|T(x)v\|=\|x\|$，又$\|v\|=1$. 所以$\|Tx\|\geqslant\|x\|$. 因此有$\|Tx\|=\|x\|$.

再由于T_x保持代数运算，保持对合，所以T是A到$B(H)$的等距$*$—同构，证毕.

这个定义说明，每个B^*-代数，都是某个Hilbert空间上有界线性算子的闭$*$—子代数.

定义13 设X是线性空间，$C\subset X$是凸集，若凸集$B\subset C$具有以下性质：

若$x\in C$，$y\in C$，$0<t<1$，且$tx+(1-t)y\in B$，则$x\in B$，$y\in B$. 则称B为C的极子集.

若C的极子集只含一点p，则称p为极点(*extrime point*)。即若$x\in C$，$y\in C$，$0<t<1$，使得$p=tx+(1-t)y$，则必有$x=y=p$，

定理36 A是可交换的B-代数，具有单元e和对合，设K是A上所有正泛函F的集合，且F满足$F(e)\leqslant 1$ ($F(e)=\|F\|$)，Δ是A上所有非零代数同态的集合，若$\widehat{x^*}=\overline{\hat{x}}(x\in A)$. 则$K$的极点集合ext$K$与$\Delta\cup\{0\}$等同，即ext$K=\Delta\cup\{0\}$.

证 首先指出K是凸集，因为若F，$G\in K$，令$h=tF+(1-t)G$，其中$0<t<1$，显然h为正泛函. 又$F(e)\leqslant 1$，$G(e)\leqslant 1$. 而$h(e)=tF(e)+(1-t)G(e)\leqslant t+(1-t)\leqslant 1$，所以$h\in K$. . 故$K$为凸集.

又显然$0\in$ext$K$. 因为若$0=tF+(1-t)G$，则必有$F=0$，$G=0$.

记A的根为N，即$N=\{x\in A\mid \hat{x}=0\}$. 若$F\in K$，则必有$F|_N=0$. 因为若$x\in N$，则$\hat{x}=0$. 又$F(x)\leqslant F(e)\rho(x)$，而$\rho(x)=$

$\|\hat{x}\|_\infty=0$. 故$F(x)=0$.

今定义$\hat{F}$: $\hat{A}\to C$为$\hat{F}(\hat{x})=F(x)$. 由$F|_N=0$知, 以上定义是有确切意义的. 事实上, 若$\hat{y}=\hat{x}$, 则$y-x\in N$. 于是$F(x)=F(y)$, 即$\hat{F}(\hat{x})=\hat{F}(\hat{y})$.

$\hat{A}\subset C(\Delta)$. 由$\hat{x^*}=\overline{\hat{x}}$知, 若$\hat{x}\in\hat{A}$, 则$\overline{\hat{x}}\in\hat{A}$. 即$\hat{A}$是自共轭的. 又$\hat{e}\in\hat{A}$同时$\hat{A}$可分离点, 即若$\varphi\neq\psi$, φ, $\psi\in\Delta$, 则必有$\hat{x}$使$\hat{x}(\varphi)\neq\hat{x}(\psi)$. 由Stone-Weierstrass定理知子代数$\hat{A}$在$C(\Delta)$中是稠密的. 又

$$|\hat{F}(\hat{x})|=|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x)\leqslant\|x\|_\infty,$$

所以$\|\hat{F}\|\leqslant 1$.

$x\to\hat{x}$保持所有代数运算, 故$\hat{F}$是线性的. 即$\hat{F}$是子代数$\hat{A}$上的有界线性泛函, 故可以将$\hat{F}$扩张到$C(\Delta)$上; 于是由Riesz表示定理知, 存在着Δ上的正则Borel测度μ, 使得

$$\hat{F}(\hat{x})=\int_\Delta\hat{x}\,\mathrm{d}\mu,$$

且$\|\mu\|=\|\hat{F}\|$. 即$F(x)=\hat{F}(\hat{x})=\int_\Delta\hat{x}\,\mathrm{d}\mu$.

又 $\mu(\Delta)=\int_\Delta 1\cdot\mathrm{d}\mu=\int_\Delta\hat{e}\,\mathrm{d}\mu=\hat{F}(\hat{e})=F(e)=\|F\|$,

$$|\hat{F}(\hat{x})|=|F(x)|\leqslant F(e)\rho(x)=F(e)\|\hat{x}\|_\infty,$$

所以 $\|\hat{F}\|\leqslant F(e)$. 又$\|\hat{F}\|\geqslant|\hat{F}(\hat{e})|=F(e)$, 所以

$$\|\hat{F}\|=\|F\|=F(e).$$

于是得$\mu(\Delta)=\|\hat{F}\|=\|\mu\|$. 即$\mu\geqslant 0$, μ为正的正则Borel测度.

记M为Δ上所有正的正则Borel测度μ的集合, 且$\|\mu\|\leqslant 1$(即

$\mu(\Delta)\leqslant 1$). 以上利用stone-weierstrass定理和Riesz表示定理知，对于每一个$F\in K$，存在唯一的$\mu\in M$，使得

$$F(x)=\int_{\Delta}\hat{x}\,d\mu,\ 且\ \|\mu\|=\|F\|.$$

反之，由$\mu\in M$，定义

$$F(x)=\int_{\Delta}\hat{x}\,d\mu.$$

显然F是线性的，且

$$F(x^{*}x)=\int_{\Delta}\widehat{x^{*}x}d\mu=\int_{\Delta}\widehat{x^{*}}\hat{x}d\mu=\int_{\Delta}\overline{\hat{x}}\hat{x}\,d\mu=\int_{\Delta}|\hat{x}|^{2}d\mu\geqslant 0,$$

即F为正泛函，所以

$$\|F\|=F(e)=\mu(\Delta)=\|\mu\|\leqslant 1,$$

故$F\in K$.

以上讨论表明K与M是1-1对应的，且保持代数运算．即若μ_1，$\mu_2\in M$，F_1，$F_2\in K$，且$\mu_1\leftrightarrow F_1$，$\mu_2\leftrightarrow F_2$，则$\alpha\mu_1+\beta\mu_2\leftrightarrow\alpha F_1+\beta F_2$。故若$\mu\in\text{ext}M$且$\mu\leftrightarrow F$，则$F\in\text{ext}K$。这是因为$\mu\leftrightarrow F$，$\gamma\leftrightarrow G$则$\alpha\mu+(1-\alpha)\gamma\leftrightarrow\alpha F+(1-\alpha)G$。又显然$0\in\text{ext}M$。事实上，若$\mu_1$，$\mu_2\in M$，$0=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2$，则必有$\mu_1=\mu_2=0$。

令δ_φ表示集中在一点φ上的测度，即

$$\delta_\varphi(w)=\begin{cases}0, & \varphi\notin w,\\ 1, & \varphi\in w.\end{cases}$$

则若$\mu\in\text{ext}M$，必有$\varphi\in\Delta$，使得$\mu=\delta_\varphi$。因为若不然，则可将Δ分成w'和w''两部分，使得$\mu(w')>0$，$\mu(w'')>0$，μ可表示为w'，w''上μ的线性组合，与$\mu\in\text{ext}M$矛盾．又若$\mu=\lambda\delta_\varphi$，$\lambda<1$．则有

$$\mu=\alpha\cdot 0+(1-\alpha)\delta_\varphi,$$

所以$\mu\notin\text{ext}M$。这表明若$\mu\in\text{ext}M$，则有$\mu=\delta_\varphi$。

反之，显然$\delta_\varphi\in\text{ext}M$．所以

$$\text{ext}M=\{0\}\cup\{\delta_\varphi\mid\varphi\in\Delta\}.$$

又 $\delta_\varphi\longleftrightarrow F(x)=\int_\Delta\hat{x}\,\mathrm{d}\mu_\varphi=\hat{x}(\varphi)=\varphi(x)$. 所以

$$\text{ext}M=\{0\}\cup\Delta. \qquad \text{定理得证.}$$

定理37 A是可交换的B-代数，具有单元和对合，K是A上所有正泛函F的集合，满足$F(e)\leqslant1$. 若$F\in K$，则下列各命题是等价的：

(1) $F(xy)=F(x)F(y)$, $\forall x, y\in A$.

(2) $F(xx^*)=F(x)F(x^*)$, $\forall x\in A$.

(3) $F\in\text{ext}K$,

(4) $F(x^*xy)=F(x^*x)F(y)$, $\forall x, y\in A$.

证 (1)→(2)是显然的.

(2)→(3).

$F(xx^*)=F(x)F(x^*)$，所以$F(e)=F(e)^2$，即或者$F(e)=0$，或者$F(e)=1$.

若$F(e)=0$. 由于$\|F\|=F(e)=0$，故$F=0$. 所以$F\in\text{ext}K$.

若$F(e)=1$. 令 $F=\dfrac{F_1+F_2}{2}$, F_1, $F_2\in K$. 又$F_1(e)\leqslant1$, $F_2(e)\leqslant1$，且$F(e)=1$，故有$F_1(e)=1$. 现在证明，若$F(x)=0$，则$F_1(x)=0$. $|F_1(x)|^2\leqslant F_1(e)F_1(x^*x)$. , $F_1(x^*x)+F_2(x^*x)=2F(x^*x)$. 又$F_2(x^*x)\geqslant0$. 所以$F_1(x^*x)\leqslant2F(x^*x)$. 故

$$|F_1(x)|^2\leqslant F_1(x^*x)\leqslant2F(x^*x)=2F(x^*)F(x).$$

因此$F_1(x)=0$.

因为$F(y-F(y)e)=0$，故$F_1(y-F(y)e)=0$，即对一切y有$F_1(y)=F(y)$，同理可证$F_2(y)=F(y)$. 所以$F\in\text{ext}K$.

(3)→(4).

设$x\in A$满足$\|x^*x\|<1$，则$\widehat{e-x^*x}=1-\widehat{x^*x}$. 因为$\|x^*x\|$

<1，则$\widehat{x^*x}$的值域$\widehat{x^*x}(\varDelta)$在单位圆内，故$\sigma(e-x^*x)\cap(-\infty, 0]=\phi$，又$e-x^*x$是自共轭的，由定理26知，存在$z\in A$，使得$z=z^*$且$z^2=e-x^*x$。

今在A上定义Φ：$\Phi(y)=F(x^*xy)$。$\Phi(y)$显然是线性泛函，且由于A是可交换的，有

$$\Phi(y^*y)=F(x^*xy^*y)=F((xy)^*xy)\geqslant 0.$$

故Φ为正泛函。若$\Phi(e)=0$，即$\|\Phi\|=0$，则$\Phi=0$，于是$F(x^*xy)=\Phi(y)=0$，$F(x^*x)=\Phi(e)=0$。此时$F(x^*xy)=F(xx^*)F(y)$显然成立。

若$\Phi(e)>0$，得$0<\Phi(e)=F(x^*x)\leqslant F(e)\rho(x^*x)$。又由$F\in\mathrm{ext}K$知，必有$F(e)=0$或$F(e)=1$，因为若$F(e)=\alpha<1$，取$G=\dfrac{F}{\alpha}$，则$G(\alpha)=1$，即$G\in K$，于是$F=(1-\alpha)\cdot 0+\alpha G$，与$F$是极点矛盾。

若$F(e)=0$，即$\|F\|=0$，故$F=0$，此时(4)显然成立。若$F(e)=1$，则

$$0<\Phi(e)\leqslant F(e)\rho(xx^*)=\rho(xx^*)\leqslant\|x^*x\|<1.$$

研究泛函$F-\Phi$。

$$\begin{aligned}(F-\Phi)(y^*y)&=F(y^*y)-F(x^*xy^*y)=F(e-x^*x)y^*y\\&=F(z^2y^*y)=F(z^*zy^*y)=F((yz)^*yz)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以$F-\Phi$为正泛函。又$F(e)=1$，$0<\Phi(e)<1$，所以$0<(F-\Phi)e<1$。于是

$$F=\Phi(e)\frac{\Phi}{\Phi(e)}+(F-\Phi)(e)\frac{F-\Phi}{(F-\Phi)(e)},$$

又$\dfrac{\Phi}{\Phi(e)}\in K$，$\dfrac{F-\Phi}{(F-\Phi)(e)}\in K$，且$F\in\mathrm{ext}k$，所以得

$$F=\frac{\Phi}{\Phi(e)}.$$

即$\Phi(y)=\Phi(e)F(y)$。也就是$F(x^*xy)=F(x^*x)F(y)$。

最后，若取消$\|x^*x\|<1$的限制，证明仍成立。因为若$\|x^*x\|=a$，只需考虑$F\left(\frac{x^*x}{a}y\right)$即可。

(4)⟶(1)。

记$\omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$。若$x\in A$，令$z_p=e+\omega^{-p}x$　　$(p=1, 2, 3)$，则

$$z_p^*=(e+\omega^{-p}x)^*=e+\omega^p x^*,$$
$$z_p^*z_p=e+\omega^p x^*+\omega^{-p}x+x^*x,$$
$$\omega^p z_p^* z_p=\omega^p+\omega^{2p}x^*+x+\omega^p x^*x.$$

又$\sum_{p=1}^{3}\omega^p=0$，$\sum_{p=1}^{3}\omega^{2p}=0$，所以得$\sum_{p=1}^{3}\omega^p z_p^*z_p=3x$。即$x=\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{3}\omega^p z_p^*z_p$。由(4)知

$$F(xy)=F\left(\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{3}\omega^p z_p^*z_p y\right)=\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{3}\omega^p F(z_p^*z_p y)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{3}\omega^p F(z_p^*z_p)F(y)=F\left(\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{3}\omega^p z_p^*z_p\right)F(y)$$
$$=F(x)F(y).$$

定理得证。

第五章　正规算子的谱分解

§5.1　单位分解

定义1　设$\mathscr{M}$是集合Ω上的σ-代数，H是Hilbert空间，$B(H)$是H上有界线性算子构成的Banach代数，若映射E: $\mathscr{M}\to B(H)$满足

(1)$E(\phi)=O$，$E(\Omega)=I$，

(2)$E(\omega)$是自共轭射影算子，$\forall\omega\in\mathscr{M}$，

(3)$E(\omega'\cap\omega'')=E(\omega')E(\omega'')$，$\forall\omega'$，$\omega''\in\mathscr{M}$，

(4)若$\omega'\cap\omega''=\phi$，则$E(\omega'\cup\omega'')=E(\omega')+E(\omega'')$.

(5)对于任意的x，$y\in H$，由下式定义的集合函数$E_{x,y}$：$\mathscr{M}\to C$

$$E_{x,y}(\omega)=(E(\omega)x,y)$$

是$\mathscr{M}$上的复测度，

则称E为（$\mathscr{M}$上）一个单位分解.

分析以上定义，需讨论以下几个事实。

(1°)定义中(3)与(2)不矛盾，需证明$E(\omega')E(\omega'')$仍是自共轭射影算子.

首先注意$E(\omega'\cap\omega'')=E(\omega''\cap\omega')$，即$E(\omega')E(\omega'')=E(\omega'')E(\omega')$，即$E(\omega')$与$E(\omega'')$是可交换的自共轭射影算子。

现在证明两个可交换的自共轭射影算子之积，仍是自共轭射影算子，即若$S=S^*$，$T=T^*$，$S^2=S$，$T^2=T$且$TS=ST$，则必为$(ST)^*=ST$，$(ST)^2=ST$.

事实上，$(ST^*)=T^*S^*=TS=ST$，

$(ST)^2=(ST)(ST)=STTS=STS=SST=ST$.

(2°)若$\omega'\cap\omega''=\phi$，则$E(\omega')+E(\omega'')$必须是自共轭射影算子

显然$E(\omega')+E(\omega'')$是自共轭的，现在证明它是射影算子，$\omega'\cap\omega''=\phi$，由(1)知$E(\omega'\cap\omega'')=0$，再由(3)得$E(\omega')E(\omega'')=0$，即$E(\omega')$，$E(\omega'')$的值域相互正交：$R(E(\omega'))\perp R(E(\omega''))$，所以

$$(E(\omega')+E(\omega''))^2=E(\omega')^2+E(\omega'')^2=E(\omega')+E(\omega'').$$

(3°)由(5)知E_{xx}是$\mathscr{M}$上的一个正测度，因为$E(\omega)$是自共轭射影算子，有

$$E_{xx}(\omega)=(E(\omega)x,\ x)=\|E(\omega)x\|^2,$$

且其全变差为

$$\|E_{xx}\|=E_{xx}(\Omega)=(E(\Omega)x,\ x)=(x,\ x)=\|x\|^2.$$

(4°)由(4)知E是有限可加的，那么E是否是可数可加的？级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\omega_n)$是否收敛？

因为若T是射影算子，则有

$$\|Tx\|=\|TTx\|\leqslant\|T\|\ \|Tx\|\leqslant\|T\|^2\|x\|,$$

即$\|T\|\leqslant\|T\|^2$，所以$\|T\|\geqslant 1$。

由此知或者$\|E(\omega)\|=0$或者$\|E(\omega)\|\geqslant 1$，故一般言之$\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\omega_n)$无意义。

但由(5)$E_{x,y}$是测度，若$\omega_n\in\mathscr{M}(n=1,2,\cdots)$且$\omega_i\cap\omega_j=\phi$ $(i\neq j)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_{x,y}(\omega_n)=E_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n\right).$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}(E(\omega_n)x,\ y)=\left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n\right)x,\ y\right),\ \forall y\in H.$$

这表明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\omega_n)x$弱收敛于$E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\omega_n\right)x$.

又由$\omega_i\cap\omega_j=\phi$知$R(E(\omega_i))\perp R(E(\omega_j))$，即对一切$x\in H$，$E(\omega_i)x\perp E(\omega_j)x$. 故$\{E(\omega_n)x\}$是$H$中的一个正交序列。由第四章

定理11知 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x$强收敛于$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x.$$

即得以下命题。

命题1 若E是单位分解，则对一切$x \in H$

$$\omega \to E(\omega)x \qquad (\mathscr{M} \to H)$$

是可数可加的。

这里看出，由定义知$\mathscr{M} \to B(H)$即$\omega \to E(\omega)$是有限可加的。但$\mathscr{M} \to H$，即$\omega \to E(\omega)x$是可数可加的。

命题2 设E是单位分解，$\omega_n \in \mathscr{M}$且$E(\omega_n) = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，若$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$，则$E(\omega) = 0$。

证 对于任意$x \in H$，$E_{xx}(\omega_n) = (E(\omega_n)x, x) = 0$又$E_{xx}$是测度，故$E_{xx}(\omega) = 0$，即$(E(\omega)x, x) = 0$，又$\|E(\omega)x\|^2 = E_{xx}(\omega)$，所以$E(\omega) = 0$。

§5.2 谱定理

设E是单位分解，现在定义$L^{\infty}(E)$。设f：$\Omega \to C$是Ω上的可测函数，在C上考虑以有理点为中心，以有理数为半径的开圆$\{D_j\}$，则$\{D_j\}$构成C上拓扑的可数基，令V是满足$E(f^{-1}(D_j)) = 0$的所有D_j的并集，由以上命题2知$E(f^{-1}(V)) = 0$，V是满足以上条件的最大开集。

V使E成为零算子，$C \setminus V$称为f的本性值域(*essential range*)，对于几乎所有的$p \in \Omega$，$C \setminus V$是包含$f(p)$的最小闭集，即对于几乎所有的$p \in \Omega$，

$$f(p) \in C \setminus V.$$

若$C\setminus V$是有界的，则称f是本性有界的(*essential bounded*)，又$C\setminus V$是闭的，故$C\setminus V$是紧的，此时定义$\|f\|_\infty$如下：

$$\|f\|_\infty=\sup\{|\lambda|\ |\lambda\in C\setminus V\}.$$

令B是Ω上所有有界可测函数的代数，取其范数为

$$\|f\|=\sup\{|f(p)|\ |p\in\Omega\}.$$

则B是一个有单元的，可交换的Banach代数，记

$$N=\{f\in B|\ \|f\|_\infty=0\},$$

则N是B的一个闭理想. 所以B/N也是一个Banach代数

定义$L^\infty(E)=B/N$， 即$\dot{f}=f+N$，且

$$\|\dot{f}\|=\inf\{\|f+n\|\,|\,n\in N\}.$$

显然$\|\dot{f}\|=\|f\|_\infty$，今后将$\dot{f}$和f等同起来，另外$\sigma(f)$就是f的本性值域，事实上，

$\lambda\in\sigma(f)\Longleftrightarrow(f-\lambda I)x$不可逆$\Longleftrightarrow$存在$x$使$(f-\lambda I)x=0$，且$E\{x|\ (f-\lambda I)x=0\}\neq 0\Longleftrightarrow$存在$x$使$f(x)=\lambda$且$E\{x\ |f(x)=\lambda\}\neq 0$.
$\Longleftrightarrow\lambda$属于$f$的本性值域.

以上定义了$L^\infty(E)$，现在寻求一个映射ψ，将$L^\infty(E)$映射为$B(H)$. 为定义ψ，先考虑$L^\infty(E)$中的简单函数，令$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$是$\Omega$的一个分割，$\omega_i\in\mathscr{M}$，$\omega_i\cap\omega_j=\phi(i\neq j)$，$s$是$\Omega$上的简单可测函数：

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{\omega_i},\qquad \alpha_i\in C$$

今定义$\psi(s)\in B(H)$如下：

$$\psi(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(\omega_i), \tag{1}$$

由于$E(\omega_i)$是自共轭的，得

$$\psi(s)^*=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}E(\omega_i).$$

又由(1)式得 $$\psi(\overline{s})=\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}E(\omega_i).$$

所以 $$\psi(s)^*=\psi(\overline{s}). \qquad (2)$$

若$(\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_m')$为$\Omega$的另一分割，且函数

$t=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{\omega_j'}$，则

$$\Psi(s)\Psi(t)=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_jE(\omega_i)E(\omega_j')=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_jE(\omega_i\cap\omega_j').$$

又 $$st=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\chi_{\omega_i\cap\omega_j'},$$

所以 $$\psi(st)=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_jE(\omega_i\cap\omega_j').$$

因此有 $$\psi(st)=\psi(s)\psi(t). \qquad (3)$$

仿此可得 $$\psi(\alpha s+\beta t)=\alpha\psi(s)+\beta\psi(t). \qquad (4)$$

由单位分解的定义中(5)知，若$x, y\in H$.

$$(\psi(s)x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE(\omega_i)x, y\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(E(\omega_i)x, y)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iE_{x,y}(\omega_i)=\int_\Omega s\mathrm{d}E_{x,y}. \qquad (5)$$

又由(2)、(3)式得

$$\psi(s)^*\psi(s)=\psi(\overline{s})\psi(s)=\psi(\overline{s}s)=\psi(|s|^2). \qquad (6)$$

由(5)式有

$$\|\psi(s)x\|^2=(\psi(s)x, \psi(s)x)=(\psi(s)^*\psi(s)x, x)$$

$$=(\psi(|s|^2)x, x)=\int_\Omega |x|^2\mathrm{d}E_{xx}. \qquad (7)$$

又 $$\int_\Omega|s|^2\mathrm{d}E_{xx}\leqslant\|s\|_\infty^2E_{xx}(\Omega)=\|s\|_\infty^2\|x\|^2,$$

所以 $\|\psi(s)x\|^2\leqslant\|s\|_\infty^2\|x\|^2$,

即 $\|\psi(s)\|\leqslant\|s\|_\infty$.

另外，取$x\in R(E(\omega_j))$，由于$E(\omega_i)E(\omega_j)=0$，$i\neq j$，故$E(\omega_i)x=0$，又由于$x=E(\omega_j)y$，则$E(\omega_j)x=E(\omega_j)^2y=E(\omega_j)y=x$. 所以由（1）式得

$$\psi(s)x=\alpha_jE(\omega_j)x=\alpha_jx.$$

今取 j 使$\alpha_j=\|s\|_\infty$，即α_j是α_1，α_2，…，α_n的最大者，则

$$\|\psi(s)x\|=|\alpha_j|\,\|x\|=\|s\|_\infty\|x\|,$$

所以$\|\psi(s)\|\geqslant\|s\|_\infty$. 于是得到

$$\|\psi(s)\|=\|s\|_\infty. \qquad (8)$$

至此ψ: $s\to\psi(s)$在简单函数上已完全确定. 若$f\in L^\infty(E)$，则存在可测简单函数s_n一致收敛于f，且ψ在s_n上完全确定，同时满足$\|\psi(s_n)\|=\|s_n\|_\infty$.由于$\{s_n\}$是Cauchy序列，所以$\{\psi(s_n)\}$也是Cauchy序列，因此$\{\psi(s_n)\}$在$B(H)$中收敛于某一个算子，将这个算子定义为$\psi(f)$.容易看出,这样定义的$\psi(f)$与所取的收敛于$(f)$的简单函数列无关. 事实上，设另有简单函数列$\{t_n\}$收敛于$f$，则$\{\psi(t_n)\}$仍为一Cauchy列，它与$\{\psi(s_n)\}$合在一起仍为一个Cauchy列，故其极限仍为$\psi(f)$.

综上所述，我们已定义了$L^\infty(E)$到$B(H)$的映射ψ，下面再研究ψ的性质.

（1） 由（8）式得$\|\psi(f)\|=\|f\|$，即ψ是保持范数的.

（2） 由（4）式及（3）式知，若$f,g\in L^\infty(E)$，则

$$\psi(\alpha f+\beta g)=\alpha\psi(f)+\beta\psi(g),$$

$$\psi(fg)=\psi(f)\psi(g).$$

（3） 由（2）知,若$f\in L^\infty(E)$,$\psi(f)^*=\psi(\overline{f})$

（4） ψ在下述意义下是唯一的

$$(\psi(f)x,y)=\int_\Omega f\mathrm{d}E_{x,y}, \qquad x,y\in H,\ f\in L^\infty(E)$$

因为若有$(\psi'(f)x,y)=\int_\Omega f\mathrm{d}E_{x,y}$,则$(\psi(f)x,y)=(\psi'(f)x,y)$对一

切$x, y\in H$成立，所以$\psi(f)=\psi'(f)$即ψ是唯一的.

以上指出，ψ是保持范数，保持加法、数乘和乘法运算，且保持对合的映射，因此ψ是保持对合的同构，即 * —同构

又由于$L^\infty(E)$是完备的，故$R(\psi)=\psi(L^\infty(E))$是闭的（保持范数），又$L^\infty(E)$是可交换的，故$R(\psi)$也是可交换的，即由$\psi$的性质（2）知

$$\psi(f)\psi(g)=\psi(fg)=\psi(gf)=\psi(g)\psi(f).$$

所以$R(\psi)$是$B(H)$的一个闭的可交换的子代数，又由ψ的性质（3）知，若$T\in\psi(L^\infty(E))$，即$T=\psi(f)$，则$T^*=\psi(\overline{f})$，故$T^*\in\psi(L^\infty(E))$. 因此$R(\psi)$是$B(H)$的闭的可交换的 * -子代数，也称为正规代数（第四章定义9）.

最后若$Q\in B(H)$与所有的$E(\omega)$可交换，由(1)式知Q与$\psi(s)$可交换，故Q与所有的$\psi(f)$可交换.

综上所述，得以下定理.

定理1 若E是单位分解，则由公式

$$(\psi(f)x, y)=\int_\Omega f\mathrm{d}E_{x,y}, \qquad (x\in H,\ y\in H)$$

确定了由Banach代数$L^\infty(E)$到$B(H)$的闭的正规子代数A上的保持范数的同构映射ψ，且保持对合

$$\psi(\overline{f})=\psi(f)^*, \qquad (f\in L^\infty(E)).$$

而且
$$\|\psi(f)x\|^2=\int_\Omega |f|^2\mathrm{d}E_{x,x}, \qquad (x\in H,\ f\in L^\infty(E)).$$

另外，$Q\in B(H)$与所有的$\psi(f)$可交换，当且仅当Q与所有的$E(\omega)$可交换.

定理2 若A是$B(H)$的闭正规子代数，$I\in A$、$\varDelta$是A的极大理想空间，$B(\varDelta)$是$\varDelta$上Borel集合的σ-代数，则

（1）在$B(\varDelta)$上存在唯一的单位分解E，使得对每一个$T\in A$有

$$(Tx,\ y)=\int_{\varDelta}\hat{T}\,dE_{x,y},$$

其中$\hat{T}$是T的Gelfand变换，

（2）若ω是$\varDelta$的非空开集，则$E(\omega)\neq 0$，

（3）算子$S\in B(H)$与每一个$T\in A$可交换的充分必要条件 是S与每一个射影算子$E(\omega)$可交换

证 （1）$B(H)$是B^*-代数，A是可交换的B^*-代数，由Gelfand-Naimark定理知，A和$\hat{A}$等距$*$—同构$A\overset{*}{\cong}\hat{A}=C(\varDelta)$。考虑$C(\varDelta)\times H\times H$到$C$的映射：

$$\hat{T},\ x,\ y\to(Tx,\ y),\qquad T\in A.$$

该映射关于$\hat{T}$和x是线性的，关于y是共轭线性的，固定x,y，这个映射是$C(\varDelta)$上的线性泛函，且

$$|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\ \|y\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\,\|y\|=\|\hat{T}\|_{\infty}\|x\|\ \|y\|.$$

故该泛函是有界的，且其范数不超过$\|x\|\ \|y\|$。由Riesz表示定理知，在$\varDelta$上存在有界的正则Borel测度$\mu_{x,y}$，使得

$$(Tx,\ y)=\int_{\varDelta}\hat{T}\,d\mu_{x,y},\tag{9}$$

且
$$\|\mu_{x,y}\|\leqslant\|x\|\ \|y\|.$$

固定$\hat{T}$，$\mu_{x,y}$具有以下性质：

$$\mu_{x_1+x_2,y}=\mu_{x_1,y}+\mu_{x_2,y},\quad \mu_{\alpha x,y}=\alpha\mu_{x,y},$$
$$\mu_{x,y_1+y_2}=\mu_{x,y_1}+\mu_{x,y_2},\quad \mu_{x,\alpha y}=\overline{\alpha}\,\mu_{x,y}.$$

事实上，

$$\int_{\varDelta}\hat{T}\,d\mu_{x_1+x_2,y}=(T(x_1+x_2),\ y)=(Tx_1,y)+(Tx_2,y)$$

$$=\int_{\varDelta}\hat{T}\,d\mu_{x_1,y}+\int_{\varDelta}\hat{T}\,d\mu_{x_2,y},\quad \forall\,\hat{T}\in C(\varDelta).$$

所以$\mu_{x_1+x_2,y}=\mu_{x_1,y}+\mu_{x_2,y}$. 同理可证其它等式.

对于$\varDelta$上任一有界Borel函数$f:\varDelta\to \boldsymbol{C}$，考虑$H\times H\to \boldsymbol{C}$的映射：

$$x,\ y\to\int_{\varDelta} f\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

它是殆线性的，且

$$\left|\int_{\varDelta} f\mathrm{d}\mu_{x,y}\right|\leqslant\|f\|_{\infty}\|\mu_{x,y}\|\leqslant\|f\|_{\infty}\|x\|\ \|y\|.$$

所以该映射是有界的，其范数不超过$\|f\|_{\infty}$，由第四章定理13知，存在唯一的$s\in B(H)$，使得

$$(x,\ sy)=\int_{\varDelta} f\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

又$(x,sy)=(s^*x,y)$，s是由f确定的，故令$s^*=\psi(f)$，则对于$\varDelta$上任一有界Borel函数f，存在$\psi(f)\in B(H)$，使得

$$(\psi(f)x,\ y)=\int_{\varDelta} f\mathrm{d}\mu_{x,y}. \tag{10}$$

注意若f是连续函数$f=\widehat{T}$，则$\psi(f)=T$即$\psi(\widehat{T})=T$。

比较(9)、(10)二式，可以看出(10)式将(9)式由连续函数$\widehat{T}$推广到有界Borel函数f. 这样可以只考虑函数的可测性。由(10)式，对于$\omega\in B(\varDelta)$，χ_{ω}可测，定义

$$E(\omega)=\psi(\chi_{\omega})$$

现在证明这样定义的$E(\omega)$是一个单位分解。

1)首先证明$E(\omega)$是自共轭算子.

当$\widehat{T}\in C(\varDelta)$取实值，$\widehat{T^*}=\overline{\widehat{T}}=\widehat{T}$，所以$T=T^*$.

$$\int_{\varDelta}\widehat{T}\mathrm{d}\mu_{x,y}=(Tx,\ y)=(x,Ty)=\overline{(Ty,x)}=\overline{\int_{\varDelta}\widehat{T}\mathrm{d}\mu_{y,x}}.$$

由$\overline{\widehat{T}}=\widehat{T}$得　　$\mu_{x,y}=\overline{\mu_{y,x}}$.

当有界Borel函数 f 取实数值，则

$$(\psi(f)x,y)=\int_{\Delta} f\mathrm{d}\mu_{x,y}=\int_{\Delta} f\overline{\mathrm{d}\mu_{y,x}}=\overline{\int_{\Delta} f\mathrm{d}\mu_{y,x}}$$

$$=\overline{(\psi(f)y,x)}=\overline{(y,\psi(f)^{*}x)}=(\psi(f)^{*}x,\ y),$$

所以 $$\psi(f)=\psi(f)^{*}.$$

因χ_{ω}是实的，所以$\psi(\chi_{\omega})^{*}=\psi(\chi_{\omega})$。即$E(\omega)^{*}=E(\omega)$。

2）证明$E(\omega'\cap\omega'')=E(\omega')E(\omega'')$，$\omega'\cap\omega''=\phi$.

若f、g是有界Borel函数，证明$\psi(fg)=\psi(f)\cdot\psi(g)$，$ST\in C(\Delta)$，$(\widehat{ST})=\widehat{S}\,\widehat{T}$，由（9）式得

$$(S(Tx),\ y)=\int_{\Delta}\widehat{s}\,\mathrm{d}\mu_{Tx,y},$$

又 $$(S(Tx),y)=((ST)x,y)=\int_{\Delta}\widehat{S}\,\widehat{T}\mathrm{d}\mu_{x,y},$$

所以 $$\int_{\Delta}\widehat{S}\,\mathrm{d}\mu_{Tx,y}=\int_{\Delta}\widehat{S}\,\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

上式对任意连续函数$\widehat{S}\in C(\Delta)$成立，所以对任意有界Borel函数 f 有

$$\int_{\Delta} f\mathrm{d}\mu_{Tx,y}=\int_{\Delta} f\,\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}.$$

再由(10)式，有

$$\int_{\Delta} f\mathrm{d}\mu_{Tx,y}=(\psi(f)Tx,y)=(Tx,\ \psi(f)^{*}y)=\int_{\Delta}\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,\psi(f)^{*}y},$$

即 $$\int_{\Delta} f\,\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,y}=\int_{\Delta}\widehat{T}\,\mathrm{d}\mu_{x,\psi(f)^{*}y}.$$

由于$\widehat{T}$连续，所以$\mu_{x,\psi(f)^{*}y}=f\mu_{x,y}$，因此对于任意有界Borel函数$g$，有

$$\int_{\Delta} gf\mathrm{d}\mu_{x,y}=\int_{\Delta} g\mathrm{d}\mu_{x,\psi(f)^*y},$$

由(10)式 $\int_{\Delta} gf\mathrm{d}\mu_{x,y}=(\psi(gf)x,\ y)$,

$$\int_{\Delta} g\mathrm{d}\mu_{x,\psi(f)^*y}=(\psi(g)x,\ \psi(f)^*y)=(\psi(f)\psi(g)x,\ y),$$

所以 $\psi(gf)=\psi(g)\psi(f)$.

由$E(\omega)$的定义知

$E(\omega'\cap\omega'')=\psi(\chi_{\omega'\cap\omega''})=\psi(\chi_{\omega'}\cdot\chi_{\omega''})=\psi(\chi_{\omega'})\cdot\psi(\chi_{\omega''})$
$=E(\omega')\cdot E(\omega'')$.

3) 在上式中令$\omega'=\omega''=\omega$，则得$E(\omega)=E(\omega)^2$，即$E(\omega)$是射影算子，又由1)知$E(\omega)$是自共轭射影算子，

4) 再证$E(\phi)=0$，$E(\Delta)=I$.

$E(\phi)=\psi(\chi_{\phi})=\psi(0)$. 且$(\psi(0)x,\ y)=0$. 所以$E(\phi)=0$.

$E(\Delta)=\psi(1)=\psi(\widehat{I})=I$ (因为$\psi(\widehat{T})=T$).

5) 证明当$\omega\cap\omega'=\phi$，则$E(\omega\cup\omega')=E(\omega)+E(\omega')$

$E(\omega\cup\omega')=\psi(\chi_{\omega\cup\omega'})=\psi(\chi_{\omega}+\chi_{\omega'})=\psi(\chi_{\omega})+\psi(\chi_{\omega'})$
$=E(\omega)+E(\omega')$.

6) 最后证明$E_{x,y}$是测度.

由$E_{x,y}$的定义知$E_{x,y}(\omega)=(E(\omega)x,y)$. 又

$$(E(\omega)x,\ y)=(\psi(\chi_{\omega})x,\ y)=\int_{\Delta}\chi_{\omega}\mathrm{d}\mu_{x,y}=\mu_{x,y}(\omega)$$

所以$E_{x,y}(\omega)=\mu_{x,y}(\omega)$. 即$E_{x,y}=\mu_{x,y}$.

由于$E_{x,y}$是正则的Borel测度，故此时称E是正则的单位分解.
$E_{x,y}=\mu_{x,y}$，由(9)式有

$$(Tx,\ y)=\int_{\Delta}\widehat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y}.$$

此外，这种正则的单位分解E是唯一的，事实上，设E'是另一个正则的单位分解，则

$$(Tx,\ y)=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y}=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E'_{x,y}.$$

由于$E_{x,y}$、$E'_{x,y}$是Borel测度，由连续函数唯一确定，

所以 $E_{x,y}=E'_{x,y}$.

即 $(E(\omega)x,\ y)=(E'(\omega)x,\ y)$, $\forall x,\ y\in H$.

因此 $E(\omega)x=E'(\omega)x$, $\forall x\in H$.

故对一切$\omega\in B(\Delta)$，$E(\omega)=E'(\omega)$，所以$E=E'$.

这样，就证明了在$B(\Delta)$上存在唯一的正则单位分解E，使得

$$(Tx,\ y)=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y},\qquad T\in A.$$

（2）若$\omega\neq\varnothing$是开集，证明$E(\omega)\neq 0$

用反证法，设$E(\omega)=0$，则对一切$x,y\in H$，有$(E(\omega),xy)=0$，即$E_{x,y}(\omega)=0$.

Δ是紧的Hausdorff空间，ω是非空集合，由Urysohn引理知，必有不为零的连续函数$\hat{T}$，其支集含于ω中，由于$E_{x,y}(\omega)=0$，则$\int_{\Delta}\hat{T}\mathrm{d}E_{x,y}=0$，故

$$(Tx,\ y)=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E_{x,y}=0.$$

于是$T=0$，即$\hat{T}=0$与$\hat{T}$不为零矛盾，所以$E(\omega)\neq 0$

（3）$S\in B(H)$，$T\in A$，证明$ST=TS\Longleftrightarrow SE(\omega)=E(\omega)S$.

$$(STx,\ y)=(Tx,\ S^{*}y)=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E_{x,S^{*}y},$$

$$(TSx,\ y)=\int_{\Delta}\hat{T}\,\mathrm{d}E_{Sx,y},$$

$$(SE(\omega)x,\ y)=(E(\omega)x,\ S^{*}y)=E_{x,S^{*}y}(\omega),$$

$(E(\omega)sx,\ y)=E_{sx,y}(\omega)$.

$ST=TS \Longleftrightarrow E_{x,s^*y}=E_{sx,y} \Longleftrightarrow E_{x,s^*y}(\omega)=E_{sx,y}(\omega) \Longleftrightarrow$

$SE(\omega)=E(\omega)S$. 定理得证.

定理 3 若$T\in B(H)$是正规算子，则

(1)在$\sigma(T)$的Borel集合上存在唯一的正则单位分解E，满足

$$T=\int_{\sigma(T)}\lambda \mathrm{d}E(\lambda).$$

(2)若$S\in B(H)$与T可交换，则S与每个$E(\omega)$可交换.

证 (1)T是正规算子，$TT^*=T^*T$，由第四章定理25知，可作包含T，T^*，I的$B(H)$的闭正规子代数，设A是所有以T，T^*为变量的多项式$P(T,\ T^*)$集合的闭包，则A就是包含T，T^*，I的$B(H)$的最小闭正规子代数，于是由定理2知，在A的极大理想空间$\varDelta$的Borel集合上存在唯一的正则单位分解F，使得

$$(Sx,\ y)=\int_{\varDelta}\widehat{S}\,\mathrm{d}F_{x,y} \tag{11}$$

对所有的$S\in A$成立，又由于多项式$P(T,T^*)$在A中稠密，由第四章定理21知，$\widehat{T}$是$\varDelta$到其值域$\widehat{T}(\varDelta)=\sigma(T)$上的同胚映射，且由第四章定理31知

$$\sigma_{B(H)}(T)=\sigma_A(T),$$

即 $$\sigma(T)=\sigma_A(T).$$

故$\varDelta$上的Borel集，通过同胚映射$\widehat{T}$，对应于$\sigma(T)$上的Borel集，且$\widehat{S}$：$\varDelta\to \boldsymbol{C}$，与$\widehat{S}\circ T^{-1}$：$\sigma(T)\to\boldsymbol{C}$是一一对应的，(11)式可相应地写为

$$(Sx,\ y)=\int_{\sigma(T)}\widehat{S}\circ\widehat{T}^{-1}\mathrm{d}E_{x,y}.$$

其中E是$B(\sigma(T))$上的单位分解，特别地，取$S=T$得到

$$(Tx,\ y)=\int_{\sigma(T)}\widehat{T}\circ\widehat{T}^{-1}\mathrm{d}E_{x,y}=\int_{\sigma(T)}j\mathrm{d}E_{x,y}, \tag{12}$$

其中$j(\lambda)=\lambda$，$\forall\lambda\in\sigma(T)$，或简写为

$$(Tx,\ y)=\int_{\sigma(T)}j\mathrm{d}E.$$

又$j(\lambda)=\lambda$，故又可写为$(Tx,\ y)=\int_{\sigma(T)}j(\lambda)\mathrm{d}E(\lambda)$. 即

$$(Tx,\ y)=\int_{\sigma(T)}\lambda\mathrm{d}E.$$

将(12)式与定理1相比较，得$\psi(j)=T,\psi(\overline{j})=\psi(j)^*=T^*$，$\psi(1)=E(\sigma(T))=I$，于是若$P$是$\lambda$和$\overline{\lambda}$的多项式，则$\psi(P(j,\overline{j}))=P(T,T^*)$，所以

$$P(T.T^*)=\int_{\sigma(T)}p(j,\overline{j})\ \mathrm{d}E=\int_{\sigma(T)}p(\lambda,\overline{\lambda})\mathrm{d}E(\lambda). \tag{13}$$

又由Stone-Weiertrass定理，多项式P在$C(\sigma(T))$中稠密，故$E(\omega)$由(13)式唯一决定，(1)得证。

(2)若$ST=TS$，则$ST^*=T^*S$(第四章定理19)，所以S与A中每一个元素可交换。由定理2知，对每个Borel集$\omega\subset B(\sigma(T))$成立着$SE(\omega)=E(\omega)S$，证毕，

单位分解E称为正规算子$T\in B(H)$的谱分解。若f是$\sigma(T)$上的有界Borel函数，有

$$T=\psi(j)=\int_{\sigma(T)}j\mathrm{d}E,$$

$$\psi(f)=\int_{\sigma(T)}f\mathrm{d}E.$$

习惯上记作. $f(T)=\psi(f)=\int_{\sigma(T)}f\mathrm{d}E.$

运用这个记号，以上定理的部分结论可归纳如下：映射ψ将$\sigma(T)$上的有界Borel函数映射到$B(H)$内，即$f\to\psi(f)=f(T)=$

$\int_{\sigma(T)} f\mathrm{d}E$，这是一个代数同态，且保持对合，$j\to j(T)=T$，$1\to j(1)=I$，

$\bar{f}\to f(T)^*$，且由于$f\in L^\infty(E)$，$\|\psi(f)\|=\|f\|_\infty$，有

$$\|f(T)\|\leqslant\sup\{|f(\lambda)|\,\big|\,\lambda\in\sigma(\tau)\}.$$

若$f\in C(\sigma(T))$，则f必在$\sigma(T)$上某一点λ_0达到其上界，且存在λ_0的邻域ω_{λ_0}，在该邻域上$f(\lambda)$接近$f(\lambda_0)$，且$E(\omega_{\lambda_0})\neq 0$，所以有

$$\|f(T)\|=\sup\{|f(\lambda)|\,\big|\,\lambda\in\sigma(T)\}.$$

若f_n一致收敛于f，则当$n\to\infty$时，$\|f_n(T)-f(T)\|\to 0$.

$T=j(T)=\psi(j)$，$j(\lambda)=\lambda$是有界Borel函数，可被简单函数一致逼近，又$\chi_\omega(T)=\psi(\chi_\omega)=E(\omega)$，所以$T$可用$E(\omega)$的线性组合来逼近.

若$S\in B(H)$，$ST=TS$，则对每一个有界Borel函数f有$Sf(T)=f(T)S$.

定理 4 若$T\in B(H)$是正规算子，则

$$\|T\|=\sup\{|(Tx,\ x)|\,\big|\,\|x\|=1\}.$$

证 由$|(Tx,\ x)|\leqslant\|Tx\|\,\|x\|\leqslant\|T\|\,\|x\|^2=\|T\|$ $(\|x\|=1)$，得

$$\sup\{|(Tx,\ x)|\,|\,\|x\|=1\}\leqslant\|T\|$$

只需证明 $\sup\{|(Tx,\ x)|\,\big|\,\|x\|=1\}\geqslant\|T\|$，为此只需证明任给$\varepsilon>0$，存在$x_0\in H$，$\|x_0\|=1$，且

$$|(Tx_0,\ x_0)|>\|T\|-\varepsilon.$$

由于T是正规的，可以作包含T的$B(H)$的最小闭*—子代数A，由Gelfand-Naimark定理A和$\hat{A}$等距*—同构，即

$$A\stackrel{\bullet}{\cong}\hat{A}=c\,(\Delta).$$

所以$\|T\|=\|\hat{T}\|_\infty$，又$\hat{T}$是Δ上的连续函数，Δ是紧空间，$\hat{T}$

的值域是$\sigma(T)$，故必存在$\lambda_0\in\sigma(T)$，使得

$$\|\widehat{T}\|_\infty=|\lambda_0|.$$

因此，只需证明任给$\varepsilon>0$，存在$x_0\in H$，使得$\|x_0\|=1$，且

$$|(Tx_0,\ x_0)-\lambda_0|<\varepsilon. \tag{14}$$

令E是T的谱分解，且记

$$\omega=\{\lambda\in\sigma(T)\,\big|\,|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\},$$

因为$\lambda_0\in\omega$，故ω非空，由定理2知$E(\omega)\neq0$，又$E(\omega)$是自共轭射影算子，故存在$x_0\in H$，使得$\|x_0\|=1$，且$E(\omega)x_0=x_0$，现在证明这个x_0满足(14)式。

由定理3，对于有界Borel函数f，有

$$\int_{\sigma(T)}f\mathrm{d}E=\psi(f)=f(T).$$

且$f\to f(T)$是代数同态，及$\|f(T)\|\leqslant\sup\{|f(\lambda)|\ |\lambda\in\sigma(T)\}$，

$j\to j(T)=T$，$1=1(T)=I$，令

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\chi_\omega(\lambda),\qquad \lambda\in\sigma(T)$$

或 $$f=(j-\lambda_0 I)\chi_\omega.$$

则 $$\psi(f)=f(T)=(\psi(j)-\lambda_0\psi(1))\psi(\chi_\omega),$$

即 $$f(T)=(j(T)-\lambda_0 1(T))\chi_\omega(T)=(T-\lambda_0 I)E(\omega),$$

故 $$f(T)x_0=(T-\lambda_0 I)E(\omega)x_0=(T-\lambda_0 I)x_0,$$

于是 $$|(f(T)x_0,\ x_0)|=|((T-\lambda_0 I)x_0,\ x_0)|=|(Tx_0,\ x_0)-\lambda_0|.$$

又 $$|(f(T)x_0,\ x_0)|\leqslant\|f(T)\|\leqslant\sup\{|f(\lambda)|\ |\lambda\in\sigma(T)\}$$

及 $$|f(\lambda)|=|(\lambda-\lambda_0)\chi_\omega(\lambda)|=\begin{cases}0, & \lambda\notin\omega,\\ \lambda-\lambda_0, & \lambda\in\omega.\end{cases}$$

但当$\lambda\in\omega$时$|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$，所以$|f(\lambda)|<\varepsilon$，即

$$|(Tx_0,\ x_0)-\lambda_0|<\varepsilon.$$

定理得证。

定理5 若$T\in B(H)$是正规算子。

(1) $T=T^*$，当且仅当$\sigma(T)\subset \boldsymbol{R}$.

(2) T是酉算子，当且仅当$\sigma(T)\subset \boldsymbol{T}$（单位圆）.

证 T是正规算子，故可作$B(H)$的包含T的最小闭*—子代数A，$A\cong C(\Delta)$，$\sigma_A(T)=\sigma(T)$.

若$\lambda\in\sigma(T)$，则有$\varphi\in\Delta$，使得$\lambda=\hat{T}(\varphi)$，$\overline{\lambda}=\hat{T}^*(\varphi)$，所以$\overline{\lambda}\in\sigma(T^*)$.

$$(1)\ \lambda\in\sigma(T)\Longleftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(T^*),\ T=T^*\Longleftrightarrow\lambda=\overline{\lambda}\Longleftrightarrow$$
$$\sigma(T)\subset \boldsymbol{R}.$$

$$(2)\ TT^*=T^*T=I\Longleftrightarrow\hat{T}\hat{T^*}=\hat{T^*}\hat{T}=1\Longleftrightarrow\lambda\overline{\lambda}=|\lambda|^2$$
$$=1\Longleftrightarrow\lambda\in\boldsymbol{T}.$$

所以 $TT^*=T^*T=I\Longleftrightarrow\sigma(T)\subset\boldsymbol{T}$.

§5.3 正规算子的特征值

定理6 若$T\in B(H)$是正规算子，E是T的谱分解，若$f\in C(\sigma(T))$，则
$$N(f(T))=R(E(f^{-1}(0))).$$

证 记$f^{-1}(0)=\omega_0$，$\{0\}$是闭集，f连续，故ω_0是闭的，ω_0也可能是空集，ω_0是Borel集，所以$E(\omega_0)$有意义.

$f\chi_{\omega_0}=0$，事实上，当$\lambda\in\omega_0$，则$f(\lambda)=0$，$\chi_{\omega_0}=1$，而$\lambda\notin\omega_0$，则$\chi_{\omega_0}=0$，所以$\psi(f)\psi(\chi_{\omega_0})=\psi(0)=0$，即
$$f(T)\chi_{\omega_0}(T)=f(T)E(\omega_0)=0.$$
由此知，若$x\in R(E(\omega_0))$，则$x\in N(f(T))$，所以
$$R(E(\omega_0))\subset N(f(T)).$$

$\sigma(T)\setminus\omega_0=\omega_1\cup\omega_2\cup\cdots$，其中$\{\omega_n\}$是互不相交的Borel集合，且dist$(\omega_0,\omega_n)>0(n=1,2,\cdots)$，这是因为$\sigma(T)\subset\boldsymbol{C}$是紧集合且为非空的．在$\boldsymbol{C}$上以有理点为中心，有理数为半径作开圆，构成$\boldsymbol{C}$上拓扑的基，这组开圆可记为$V_1,V_2,\cdots$．在$\sigma(T)\setminus\omega_0$上可作开圆盘$\omega_1$，

使$d(\omega_1,\omega_0)>0$，再作开圆盘ω_2'，将$\omega_1\cap\omega_2'$部分及ω_2'落在$\sigma(T)$外的部分除去，得到ω_2，同理可作ω_3，…等等，即得到ω_1，ω_2，…。

定义
$$f_n(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(\lambda)}\chi_{\omega_n}(\lambda), & \lambda\notin\omega_0,\\ 0, & \lambda\in\omega_0,\end{cases}$$

或
$$f_n(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(\lambda)}, & \lambda\in\omega_n,\\ 0, & \lambda\notin\omega_n.\end{cases}$$

因为$d(\omega_n,\ \omega_0)>0$，故当$\lambda\in\omega_n$时$\dfrac{1}{f(\lambda)}$有界，故$f_n(\lambda)$是有界Borel函数。又$f_n(\lambda)f(\lambda)=\chi_{\omega_n}(\lambda)$，即$f_n\cdot f=\chi_{\omega_n}$，所以

$$f_n(T)f(T)=\chi_{\omega_n}(T)=E(\omega_n),\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

若$x\in N(f(T))$，则$f(T)x=0$．所以$E(\omega_n)=0$对一切n成立，又映射$\omega\to E(\omega)x$是可数可加的（§5.1命题1），所以$E(\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n)x=E(\sigma(T)\setminus\omega_0)x=0$，又$E(\sigma(T))=I$，所以

$$E(\omega_0\cup(\sigma(T)\setminus\omega_0))x=E(\sigma(T))x=x,$$

即
$$E(\omega_0)x+E(\sigma(T)\setminus\omega_0)x=x.$$

因此有$E(\omega_0)x=x$，故$x\in R(E(\omega_0))$，即$N(f(T))\subset R(E(\omega_0))$。

最后得到
$$N(f(T))=R(E(\omega_0)).$$
定理得证。

定理7 若E是正规算子$T\in B(H)$的谱分解，$\lambda_0\in\sigma(T)$，则

(1) $N(T-\lambda_0 I)=R(E(\{\lambda_0\}))$，

(2) λ_0是T的特征值，当且仅当$E(\{\lambda_0\})\neq 0$，

(3) 若λ_0是$\sigma(T)$的孤立点，则λ_0必为T的特征值。

(4) 若$\sigma(T)=\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\}$是可数集，则每一个$x\in H$可唯一地表示为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i,$$

其中$Tx_i=\lambda_i x_i$，且$x_i\perp x_j$，当$i\neq j$。

证 （1）由定理6，取$f(\lambda)=\lambda-\lambda_0$，显然$f^{-1}(0)=\{\lambda_0\}$，又$f=j-\lambda_0 1$，所以$f(T)=j(T)-\lambda_0 1(T)=T-\lambda_0 I$，所以

$$N(T-\lambda_0 I)=R(E\{\lambda_0\}))$$

（2）若λ_0是T的特征值，即存在$x_0\neq 0$使得$Tx_0=\lambda_0 x_0$，即$(T-\lambda_0 I)x=0$有非零解，$x_0\in N(T-\lambda_0 I)$，所以$N(T-\lambda_0 I)$不是零维的，由（1）知$R(E(\{\lambda_0\}))$不是零维的，所以$E(\{\lambda_0\})\neq 0$。

反之，$E(\{\lambda_0\})\neq 0$，则$N(T-\lambda_0 I)$不是零维的，故存在$x\neq 0$使$(T-\lambda_0 I)x=0$即λ_0是T的特征值。

（3）若λ_0是$\sigma(T)$的孤立点，则$\{\lambda_0\}$是$\sigma(T)$中的开集，由定理2知$E(\{\lambda_0\})\neq 0$，由（2）知λ_0是T的特征值。

（4）$E(\{\lambda_i\})$中有些可能为零算子，有些可能是非零算子，例如λ_i是$\sigma(T)$的孤立点。但无论是哪种情形，$E(\{\lambda_i\})$的值域是相互正交的，事实上，若$\omega_1\cap\omega_2=\phi$，则$E(\omega_1\cap\omega_2)=E(\omega_1)\cdot E(\omega_2)=0$，即$R(E(\omega_1))\perp R(E(\omega_2))$，因此若$\lambda_i\neq\lambda_j$则$R(E(\{\lambda_i\}))\perp R(E(\{\lambda_j\}))$。记$E_i=E(\{\lambda_i\})$，则有$E_i x\perp E_j x(i\neq j)$，对一切$x\in H$成立，又$E(\omega)x$是可数可加的，得

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\lambda_i\}\right)x=\sum_{i=1}^{\infty}E_i x,\quad \forall x\in H.$$

又 $E\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{\lambda_i\}\right)x=E(\sigma(T))x=Ix=x$. 所以有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}E_i x.$$

记$x_i=E_i x$，得

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i,$$

其中$x_i\perp x_j(i\neq j)$。

又$x_i=E_i x=E(\{\lambda_i\})x$，故$x_i\in R(E(\{\lambda_i\}))$，由（1）知$x_i\in N(T-\lambda_i I)$，所以$Tx_i=\lambda_i x_i$。

再由x_i的正交性及$Tx_i=\lambda_i x_i$，利用(1)得出以上表达式是唯一的。定理得证。

§5.4 正算子和平方根

定义 2 若$T\in B(H)$满足$T=T^*$，$\sigma(T)\subset[0,\infty)$，则称$T$为正算子，记作$T\geqslant 0$。

定理 8 $T\in B(H)$，$T\geqslant 0$的充分必要条件是对于任意的$x\in H$，$(Tx,x)\geqslant 0$。

证 若$T\geqslant 0$，令E是T的谱分解，则

$$(Tx,\ x)=\int_{\sigma(T)}\lambda\,\mathrm{d}E_{xx}(\lambda),\ \forall x\in H.$$

因为E_{xx}是正测度，在$\sigma(T)$上$\lambda\geqslant 0$，所以$(Tx,\ x)\geqslant 0$。

反之，若$(Tx,x)\geqslant 0$，则

$$(T^*x,\ x)=(x,\ Tx)=\overline{(Tx,x)}=(Tx,\ x).$$

所以$T^*=T$。由定理 5 知$\sigma(T)\subset \boldsymbol{R}$，令$\lambda>0$。

$$((T+\lambda I)x,\ x)=(Tx,\ x)+\lambda(x,\ x)\geqslant\lambda(x,\ x)=\lambda\|x\|^2.$$

又 $$((T+\lambda I)x,\ x)\leqslant\|(T+\lambda I)x\|\,\|x\|$$

所以 $$\|(T+\lambda I)x\|\geqslant\lambda\|x\|,\ \forall x\in H.$$

故$(T+\lambda I)$在$B(H)$中可逆，即$T-(-\lambda)I$可逆，所以$-\lambda\notin\sigma(T)$。$\sigma(T)\subset[0,\infty)$，因此$T\geqslant 0$。定理得证。

在第四章定理30中曾经证明"若A是B^*-代数，$y\in A$，则$yy^*\geqslant 0$"，在B^*-代数$B(H)$中，容易证明，若$T\in B(H)$，则$T^*T\geqslant 0$，利用以上定理，只需证明$(T^*Tx,x)\geqslant 0$。这是显然的，因为

$$(T^*Tx,x)=(Tx,\ Tx)=\|Tx\|^2\geqslant 0$$

定理 9 每一个正算子$T\in B(H)$，都存在唯一的正平方根$S\in B(H)$即$S\geqslant 0$且$S^2=T$，又若T可逆，则S也是可逆的。记作$S=\sqrt{T}$

证 令A是$B(H)$的包含I、T的任一闭的正规子代数，则$A\cong\widehat{A}=C(\varDelta)$，$T\geqslant 0$且$\widehat{T}(\varDelta)=\sigma(T)$，所以$\widehat{T}\geqslant 0$，即$\widehat{T}$是非负的连

续函数，所以$\hat{T}$有唯一非负的连续平方根$\sqrt{\hat{T}}$，也就是存在唯一的$S\in A$，使得$\hat{S}=\sqrt{\hat{T}}$。由$\hat{S}\geqslant 0$知$\sigma(S)=\hat{S}(\varDelta)\subset[0,\infty)$。又$\widehat{S^*}=\overline{\hat{S}}=\hat{S}$，所以$S^*=S$，故$S\geqslant 0$。

再由$\widehat{S^2}=\hat{S}^2=\hat{T}$，得$S^2=T$，即存在唯一的$S\in A$，满足$S\geqslant 0$且$S^2=T$。

令A_0是以上所作的子代数A中最小的一个，则由以上证明知，存在唯一的$S_0\in A_0$，使得$S_0\geqslant 0$，$S_0{}^2=T$。

再证明S的唯一性，设$S\in B(H)$满足$S\geqslant 0$，$S^2=T$，令A是$B(H)$的包含I、S的最小闭正规子代数，因为$T=S^2$，故$T\in A$，所以$A\supset A_0$，由以上证明知A中有唯一的S使得$S\geqslant 0$，$S^2=T$，又$S_0\in A_0\subset A$，，也满足$S_0\geqslant 0$，$S_0{}^2=T$，所以$S_0=S$。即T的非负平方根是唯一的。

最后证明，若T^{-1}存在，则$S^{-1}=T^{-1}S$，为此只需证明

$$ST^{-1}S=T^{-1}SS=I$$

显然$T^{-1}SS=T^{-1}S^2=T^{-1}T=I$，现证$ST^{-1}=T^{-1}S$，由以上证明中知，$S$，$T\in A$且$A$是$B(H)$的闭正规子代数，所以$ST=TS$。又$T^{-1}$存在，记$ST^{-1}=J$，$T^{-1}S=K$，则$TJ=TST^{-1}=STT^{-1}=S$，所以$J=T^{-1}S=K$，即$ST^{-1}=T^{-1}S$，定理得证。

定理10 若$T\in B(H)$，则T^*T的正平方根P满足

$$\|Px\|=\|Tx\|,\quad \forall x\in H$$

且在$B(H)$的正算子中，只有P满足该式。

证 $T\in B(H)$，则$T^*T\geqslant 0$，所以$P=\sqrt{T^*T}$唯一存在

若P是正算子，则

$$\|Px\|^2=(Px,\ Px)=(P^*Px,\ x)=(P^2x,\ x),$$

又 $$\|Tx\|^2=(Tx,\ Tx)=(T^*Tx,\ x),$$

所以$\|Px\|=\|Tx\|$当且仅当$P^2=T^*T$，定理得证。

已知，每一个复数α都可以表示为$\alpha=\lambda|\alpha|$，其中$|\lambda|=1$，于

是考虑，对于$T\in B(H)$，是否可将T表示为$T=UP$，其中U是酉算子，$P\geqslant 0$，若以上表示是可能的，则称UP为T的极分解。

若$T=UP$，由于U是酉算子,保持范数,所以$\|Px\|=\|UPx\|=\|Tx\|$，由定理10知$P=\sqrt{T^*T}$故P是唯一的。

定理11 $T\in B(H)$

（1）若T可逆，则T具有唯一的极分解$T=UP$。

（2）若T是正规的，则T有极分解$T=UP$，且T、U、P两两可交换。

证（1）若T可逆，则T^*，T^*T可逆，由定理9知$P=\sqrt{T^*T}$可逆，令$U=TP^{-1}$，则U可逆，且

$$U^*U=(TP^{-1})^*(TP^{-1})=P^{-1}T^*TP^{-1}=P^{-1}P^2P^{-1}=I$$

又U^{-1}存在,且U^*为U的左逆，故U^*一定也是右逆,即$U^*U=UU^*=I$，U是酉算子。

又$P=\sqrt{T^*T}$是唯一的，P可逆，故U是唯一的。（1）得证。

（2）T是正规的，作A包含T且为$B(H)$的闭正规子代数，令E是T的谱分解。

在$\sigma(T)$中令

$$U(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{|\lambda|}, & \lambda\neq 0,\\ 1, & \lambda=0,\end{cases}\qquad p(\lambda)=\lambda.$$

则U，P都是$\sigma(T)$上有界Borel函数，所以

$$(P(T)x,\ x)=\int_{\sigma(T)}|\lambda|\,dE_{xx}\geqslant 0.$$

故$P(T)\geqslant 0$。又

$$U(T)U(T)^*=U(T)\overline{U(T)}=(U\overline{U})(T)=1(T)=I.$$

且 $U(\lambda)P(\lambda)=UP(\lambda)=\lambda$. 即$UP=j$. 所以$U(T)P(T)=T$，即

$$T=UP.$$

其中$P\geqslant 0$，U是酉算子。又T，P，$U\in A$，所以T、P、U两两可

交换. 定理得证.

定义 3 设M, $N\in B(H)$, 若存在$T\in B(H)$使得

$$M=TNT^{-1}$$

则称算子M和N是相似的, 记作$M\sim N$.

若存在酉算子$U\in B(H)$使得

$$M=UNU^{-1}$$

则称算子M和N是酉等价的.

定理12 M、$N\in B(H)$是正规算子, 若$M\sim N$, 则M和N是酉等价的.

证 $M\sim N$, 则存在$T\in B(H)$使得$M=TNT^{-1}$, 因T^{-1}存在, 由定理11知T有极分解$T=UP$, 其中U是酉算子, $P=\sqrt{T^*T}$且P可逆. 所以

$$M=UPNP^{-1}U^{-1}$$

现只需证明$PNP^{-1}=N$, 即$PN=NP$, 先证明$P^2N=NP^2$即$T^*TN=NT^*T$. 由于$M=TNT^{-1}$, 即$MT=TN$. 由第四章定理 19 知$M^*T=TN^*$. 得$T^*M=(M^*T)^*=(TN^*)^*=NT^*$, 所以$NT^*T=T^*MT=T^*TM$. 即$NP^2=P^2N$.

又P^2是正规算子, N与$f(P^2)$可交换, 其中$f\in C(\sigma(P^2))$, 因$P\geqslant 0$, $\sigma(P^2)\subset[0,\infty)$, 取$f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$, $\lambda\in\sigma(P^2)$, 则$f(P^2)=P$, 得$NP=PN$. 即$PNP^{-1}=N$. 所以$M=UNU^{-1}$. 定理得证.

第六章　拓扑群

拓扑群的概念是将群的概念与拓扑空间的概念联系在一起而产生的．同一个集合G中同时有群的乘法或加法运算与拓扑运算，这些运算由连续性条件相互联系着，即要求G的所有群的运算在拓扑空间G中连续。由于这样引入拓扑群，群与拓扑空间的基本关系几乎都可以转移到拓扑群上来讨论，例如子群、商群等．本章给出拓扑群的一些基本性质，特别要研究局部紧拓扑群，证明在其上存在不变的Borel测度．为下一章讨论交换群上的调和分析作准备。

§6.1　基本概念

定义1　G为集合，若满足

(1)G为群，

(2)G为拓扑空间，

(3)G中所具有的群的运算在拓扑空间G中连续。

则称G为拓扑群．

条件(3)是指如下两种运算的连续性：

(3a)$G\times G\to G$,

$x,y\to xy$ ($x,y\to x+y$)；

(3b)$G\to G$

$x\to x^{-1}$。

更完整地说，映射$x,y\to xy$连续，是指若x,y是集合G的二元素，那末对于元素xy的任一邻域W，总存在元素x与y的邻域U与V，使得
$$UV\subset W,$$
其中
$$UV=\{ab\,|\,a\in U,\ b\in V\}。$$

映射 $x\to x^{-1}$ 连续，是指若 x 是集合 G 的元素，那末对于元素 x^{-1} 的每一个邻域 V，总存在元素 x 的邻域 U，使得

$$U^{-1}\subset V,$$

其中
$$U^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in U\}.$$

下面给出几个拓扑群的例子。

例 1 赋范线性空间是加法拓扑群。显然在赋范线性空间加法运算 $x,y\to x+y$ 是连续的，这是指，若 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $x_n+y_n\to x+y$。同时映射 $x\to x^{-1}$ 是连续的，是指 $x_n\to x$，则 $-x_n\to -x$。

例 2 实数 $\boldsymbol{R}$ 和复数 $\boldsymbol{Z}$ 在通常加法与通常拓扑下是拓扑群。单位圆周 $\boldsymbol{T}$ 是乘法拓扑群。

例 3 每一个代数群取离散拓扑都是一个拓扑群。

例 4 $GL(n,\boldsymbol{C})$ 表示 $n\times n$ 非奇异复数矩阵所成的一般线性群，取通常的矩阵乘法为群的运算，将 $n\times n$ 矩阵看成 C^{n^2} 中元素，在 C 的拓扑下矩阵乘法自然是连续的，因此 $GL(n,C)$ 是一个拓扑群。

同理 $GL(n,R)$ 表示 $n\times n$ 非奇异实数矩阵所成的一般线性群，也构成一个乘法拓扑群，且它们有一些闭子群。例如：

$SL(n,R)$ 表示 $GL(n,R)$ 中行列式为 1 的 $n\times n$ 矩阵全体，构成 $GL(n,R)$ 的闭子群。

$U(n,C)$ 表示 $GL(n,C)$ 中满足 $UU^*=U^*U=I$ 的 $n\times n$ 矩阵 U 的全体，构成 $GL(n,C)$ 的闭子群，称为酉群，其中 U^* 代表复转置，即 $U^*=\overline{U'}$，U' 代表 U 的转置矩阵。

以上例 1、2 所给出的拓扑群是可交换的，更一般地 R^n、Z^n、T^n 都是可交换的拓扑群。例 4 给出的拓扑群则是不可交换的。

下面给出拓扑群的一些初等性质：

(1) 取定 $a\in G$，G 是拓扑群，则映射 $x\to xa$，$x\to ax$，$x\to x^{-1}$ 都是 G 上的同胚映射。

证 仅就映射 $x\to xa$ 证明。首先，映射是1-1的，事实上，对每一个元素 $y\in G$，存在 $x\in G$ 使得 $y=xa$，且 x 是唯一的。其次，$x\to xa$ 是连续的。若 $y=xa$，W 为 y 的一个邻域，由定义 1 知，存

在x与a的邻域U与V，使$UV\subset W$，而$a\in V$。因此$Ua\subset W$。故映射是连续的。同理，可证逆映射$y\to ya^{-1}$的连续性。

（2）设G是拓扑空间，又是群，则G是拓扑群的充分必要条件是映射$x,y\to xy^{-1}$（$G\times G\to G$）是连续的。

证 只需证明定义1中条件（3）可用以下条件来代替．"若$x,y\in G$，那末对于元素xy^{-1}的任一邻域W，总存在x与y的邻域U与V，使得$UV^{-1}\subset W$。"该条件记作(3c)。

设$z=xy^{-1}$。W为z的一个邻域，由定义1的条件(3a)知存在x与y^{-1}的邻域U与V_1，使得$UV_1\subset W$。再由条件(3b)知存在y的邻域V使得$V^{-1}\subset V_1$，所以$UV^{-1}\subset W$。即由(3a)和(3b)推出(3c)。

反之，若(3c)成立。将y^{-1}写成$ey^{-1}=y^{-1}$。V_1为y^{-1}的一个邻域，则存在着e与y的邻域U_1与V使得$U_1V^{-1}\subset V_1$，又$e\in U_1$。所以$V^{-1}\subset U_1V^{-1}$。因此$V^{-1}\subset V_1$，即得(3b)。再证(3a)。设$z=xy$或$z=x(y^{-1})^{-1}$。设W为z的邻域，由(3c)知，存在x与y^{-1}的邻域U与V_1使得$UV_1^{-1}\subset W$。又V_1是y^{-1}的邻域，由以上证明知，存在y的邻域V使$V^{-1}\subset V_1$，或$V\subset V_1^{-1}$。于是有$UV\subset UV_1^{-1}\subset W$。(3a)得证。

（3）拓扑群G是齐性的。这是指对任何a，$b\in G$，存在C到G上的同胚映射，将a映成b。即存在同胚映射φ，使$\varphi(a)=b$。

为证明这一事实，只需考虑映射

$$\varphi:\ G\to G$$
$$x\to xa^{-1}b.$$

注意到$a^{-1}b$是固定的，由（1）知这个映射是同胚的。

由拓扑群的齐性知，若知道包含G内某一点a的开集，就可以知道包含任意点的开集。特别若知道包含e的开集U，则就可以知道包含任意点b的开集bU。有以下结论：

对于包含a的开集V，存在包含e的开集U，使得$aU\subset V$及$Ua\subset V$。

事实上，$ea=a$。由乘法的连续性知，对于a的邻域V，存在

e 的邻域U，及 a 的邻域W，使得$UW\subset V$,又$a\in W$，所以$Ua\subset V$. 同理可证$aU\subset V$.

由以上讨论知，在拓扑群中，要研究某点 a 的邻域，只需研究单元 e 的邻域. 例如要证明G是局部紧的，只需证明，单元 e 的某一邻域U，其闭包$\overline{U}$是紧的.

（4）若U是单元 e 的邻域，则存在 e 的邻域V，使得$V=V^{-1}$且$V\subset U$. 称V为 e 的对称邻域.

证 设$V=U\cap U^{-1}$.显然V是 e 的邻域,且$V\subset U$. 现证$V^{-1}=V$.

设$a\in V$，则$a\in U$，$a\in U^{-1}$. 由$a\in U$得$a^{-1}\in U^{-1}$，由$a\in U^{-1}$得$a^{-1}\in U$. 所以$a^{-1}\in U\cap U^{-1}=V$. 即$a\in V$则$a^{-1}\in V$,所以$V=V^{-1}$.

（5）U是 e 的邻域，则存在 e 的邻域W，使得$W^2\subset U$.

证 $e=ee$. 设U是 e 的邻域,则存在 e 的两个邻域W_1,W_2，使得$W_1W_2\subset U$. 取$W=W_1\cap W_2$，则$W^2\subset W_1W_2\subset U$.

类似地可得$W^n\subset U$，其中n是任何正整数.

（6）若H、K是拓扑群G的两个紧子集，则乘积HK是紧的.

证 考虑映射$f:G\times G\to G$，$(g_1,g_2)\to g_1g_2$. 因为H，K是紧子集，所以乘积空间$H\times K$是紧的，又因映射 f 是连续的，故紧集的象仍为紧的. 即$H\times K$的象HK是紧的.

（7）若H是拓扑群G中的开集，则对G中任一集合S，HS与SH都是开集.

证 任取$s\in S$. 因为f：$H\to Hs$，即$f(g)=gs$是同胚映射，所以$f(H)=Hs=\{gs\,|g\in H\}$是开集. 又$HS=\bigcup\limits_{s\in S}Hs$. 因此$HS$是开集，同理可证$SH$是开集.

（8）若开集$U\subset G$，紧集$K\subset G$，则

$$A=\{x\in G\,|xK\subset U\}，B=\{x\in G\,|Kx\subset U\}$$

都是开集.

证 任取$x\in A$，对一切$k\in K$有$xk\in U$. 根据乘法的连续性知，存在包含 x 的开集V_k，包含 k 的开集W_k，使得$V_kW_k\subset U$. 令 k 在

K中变动，则W_k的并集盖住K，即$\bigcup_{k}\{W_k|k\in K\}\supset K$。但集合$K$是紧的，所以存在$K$中有限个元素$k_1$，$k_2$，…，$k_n$使得$W_{k_1}\cup W_{k_2}\cup\cdots\cup W_{k_n}\supset K$。

令$V=V_{k_1}\cap V_{k_2}\cap\cdots\cap V_{k_n}$，则$V$是开集且$x\in V$．任取$y\in V$，则必有$y\in V_{k_j}(j=1,2,\cdots n)$，因此对任意的$k\in K$有$k\in W_{k_j}$且$yk\in V_{k_j}W_{k_j}^{k}\subset U$。所以$y\in A$；从而$V\subset A$。

以上证明了任取$x\in A$，存在开集V，使得$x\in V\subset A$。因此A是开集。同理可证B是开集。

定义 2　若函数f：$G\to C$满足以下条件：任给$\varepsilon>0$，存在包含e的开集V，使得对一切$a\in V$，不等式

$$|f(x)-f(ax)|\leqslant\varepsilon$$

对一切$x\in G$成立，则称f是左一致连续的．

若不等式

$$|f(x)-f(xa)|\leqslant\varepsilon$$

对一切$x\in G$成立，则称f是右一致连续的。

若f既是左一致连续，又是右一致连续，则称f为一致连续的．显然在交换群上左一致连续和右一致连续是相同的．

定义 3　对于函数f：$G\to C$，若$a\in G$，定义$f_a(x)$为$f_a(x)=f(a^{-1}x)$．

定理 1　若f：$G\to C$是左一致连续的，$a\in G$，则映射φ：$a\to f_a$是连续的。

证　令$C(G)$表示所有有界复连续函数，则$C(G)$为一赋范线性空间，其范数为$\|g\|_\infty$，（$g\in C(G)$）。φ在a点连续是指，任给$\varepsilon>0$，存在a的邻域U，当$b\in U$时有$\|f_b-f_a\|_\infty<\varepsilon$。由拓扑群的性质3知，以上事实等价于，任给$\varepsilon>0$，存在$e$的邻域$V$，使得对所有$c\in V$有$\|f_{ac}-f_a\|_\infty<\varepsilon$。

由于$f_{ac}(x)=f((ac)^{-1}x)=f(c^{-1}a^{-1}x)=f_c(a^{-1}x)=(f_c)_a(x)$，所以　$f_{ac}-f_a=(f_c-f)_a$.

又 $\|g\|_\infty=\|g_a\|_\infty$ 于是 $\|f_{ac}-f_a\|_\infty<\varepsilon$ 即 $\|f_c-f\|_\infty<\varepsilon$. 这说明要证明 φ: $a\to f_a$ 在 a 处的连续性，只需证明它在 e 处的连续性.

根据 f 的左一致连续性，任给 $\varepsilon>0$，存在 e 的对称 邻 域 V，使得对一切 $c\in V$ 有

$$|f(x)-f(cx)|\leqslant\varepsilon, \qquad \forall x\in G,$$

即

$$|(f-f_{c^{-1}})(x)|\leqslant\varepsilon \qquad \forall x\in G.$$

由于 V 的对称性，$c^{-1}\in V$，$c\in V$. 故得

$$|(f-f_c)(x)|\leqslant\varepsilon. \qquad \forall x\in G.$$

从而 $\|f-f_c\|_\infty<\varepsilon$. 即 φ 在 e 处连续，所以 φ 在 a 处 连 续，又 $a\in G$ 是任意的，故 φ 是连续函数.

定义 4 若 G 是 拓 扑 群，G 作 为 拓 扑 空 间 是 局 部 紧 的 Hausdorff空间，则称 G 为局部紧群.

我们用 $C_\infty(G)$ 表示满足以下条件的函数全体：$f\in C(G)$，且对任给 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K\subset G$，使得在 K^c 上有 $|f|<\varepsilon$.

定理 2 G 是局部紧群，若 $f\in C_\infty(G)$，则 f 是一致连续的.

证 先证 f 是左一致连续的. 因为 $f\in C_\infty(G)$，所以 对 于 任给 $\varepsilon>0$，存在紧集 $K\subset G$，使得在 K^c 上 $|f|<\frac{\varepsilon}{2}$.

任取 $a\in K$，f 在 a 处 连 续，故 存 在 开 集 U_a，$e\in U_a$ 使 得

$$|f(ua)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $u\in U_a$ 成立，又对 $U_a\ni e$，存在对称开 集 $V_a\ni e$，使得 $V_a^2\subset U_a$. 由于 K 是紧集，$\{V_a a\,|a\in K\}$ 是 K 的开覆盖，则存在 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in K$，使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}a_i\supset K.$$

令

$$V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i},$$

则 $V^{-1}=V$，V 是开集且 $e\in V$.

下面证明，任给 $\varepsilon>0$，有

$$|f(x)-f(cx)|\leqslant\varepsilon,\ \forall c\in V,\ \forall x\in G.$$

分三种情形：

(1)若$cx\notin K$, $x\notin K$, 则

$$|f(x)-f(cx)|\leqslant|f(x)|+|f(cx)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2)$x\in K$, 则必有某个a_i使$x\in V_{a_i}a_i\subset U_{a_i}a_i$, $cx\in VV_{a_i}a_i\subset V_{a_i}^2a_i\subset U_{a_i}a_i$, 所以

$$|f(x)-f(cx)|\leqslant|f(x)-f(a_i)|+|f(a_i)-f(cx)|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(3)$cx\in K$, 则必有某个a_j使$cx\in V_{a_j}a_j\subset U_{a_j}a_j$, $x\in c^{-1}V_{a_j}a_j\subset VV_{a_j}a_j\subset U_{a_j}a_j$. 所以

$$|f(x)-f(cx)|\leqslant\varepsilon$$

由以上讨论知$f(x)$是左一致连续的. 同理可证, f是右一致连续的. 定理得证.

§6.2 子群和商群

定义5 若G是拓扑群, H满足

(1)H是群G的子群, 即若$a,b\in H$, 则$ab^{-1}\in H$.

(2)H是拓扑空间G的子空间.

则称H是拓扑群G的子群.

定义6 若H是拓扑空间G的开子集, 又是拓扑群G的子群, 则称H为拓扑群G的一个开子群.

有了子群的概念, 可以在群G中引入等价概念. H是群G的子群, 若$a,b\in G$, 当且仅当$b^{-1}a\in H$时, 称a与b是等价的, 记作$a\sim b$. 这样建立起来的等价关系满足下列条件:

(1)反射性 $a\sim a$;

(2)对称性 若$a\sim b$, 则$b\sim a$;

(3)传递性 若$a\sim b$, $b\sim c$, 则$a\sim c$.

事实上, 由$a^{-1}a=e\in H$知$a\sim a$, 若$a\sim b$即$b^{-1}a\in H$, 则

$(b^{-1}a)^{-1}=a^{-1}b\in H$，即 $b\sim a$。又若 $a\sim b$，$b\sim c$ 即$b^{-1}a\in H$，$c^{-1}b\in H$，则$c^{-1}a=c^{-1}bb^{-1}a\in H$。即 $a\sim c$。

按以上关系，将G中元素分成了等价类。每一个等价类，称为群G按子群H划分的左傍集，若A为按H划分的一个左傍集，且$a\in A$，则$A=aH$。且每一个形如bH的子集都是左傍集。又$H=eH$，故H本身也是一个左傍集。

完全类似地，可以引入另一等价关系：$a,b\in G$，$a\sim b$当且仅当$ab^{-1}\in H$。这样所得的等价类称为按子群H划分的右傍集。

定理 3 若H是拓扑群G的开子群，则H是闭集。

证 只需证明$G\setminus H$是开集。由于H是开集，利用§6.1拓扑群的性质(7)知，每一个左傍集都是开集。又

$$G\setminus H=\bigcup\{xH\mid x\in G\setminus H\},$$

所以$G\setminus H$是开集。定理得证。

定理 4 若H是拓扑群G的子群，且H包含单元e的一个邻域，则H是G的开子群。

证 因为存在开集$U\subset H$，使得$e\in U$。所以$H\subset HU$，又U是H的子集。所以$HU\subset H$。由此得

$$H=HU.$$

U是开集，故HU亦是开集。即H是G的开子群。证毕。

若G是拓扑群，H是G的子群。考虑左傍集空间

$$G/H=\{xH\mid x\in G\},$$

并考虑映射π：$G\to G/H$，

$$x\to xH=\dot{x},$$

或写成

$$\pi(x)=\pi x=\dot{x}=xH.$$

在G/H中给出一个拓扑，使π是连续的。为此用下面的方法给出G/H中开集的定义：G/H中的子集W是开集，当且仅当$\pi^{-1}(W)$在G中是开的。这样得到集类

$$\widehat{W}=\{W\subset G/H\mid \pi^{-1}(W)\text{是}G\text{中开集}\}.$$

由于$\pi^{-1}(\phi)=\phi$，$\pi^{-1}(G/H)=G$.显然有$\phi, G/H\in\widehat{W}$. 若$\{W_\alpha\}$为$\widehat{W}$中一集族，由于$\pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha W_\alpha\right)=\bigcup_\alpha \pi^{-1}(W_\alpha)$，而每一个$\pi^{-1}(W_\alpha)$为开集。所以$\bigcup_\alpha W_\alpha\in\widehat{W}$. 又若$W_1$，$W_2\in\widehat{W}$，则$\pi^{-1}(W_1\cap W_2)=\pi^{-1}(W_1)\cap\pi^{-1}(W_2)$，故$W_1\cap W_2\in\widehat{W}$. 因此按以上方法定义的$W$确实满足开集的要求.这样定义的拓扑是$G/H$中使$\pi$连续的最强的拓扑.

定理 5

(1)π是开映射，即若$U\subset G$是开集，则$\pi(U)$是G/H中的开集。

(2)若H是G的闭子集，则G/H是Hausdorff空间.

(3)映射$(x, yH)\to xyH$是$G\times G/H\to G/H$的连续映射.(此时G/H是拓扑空间，$G\times G/H$是看成拓扑群作用在拓扑空间上)

证 (1) $\pi^{-1}(\pi U)=UH=\bigcup_x\{Ux\,|x\in H\}$.

事实上$\pi U=\{xH\,|x\in U\}=UH$.若$v\in\pi^{-1}(\pi U)$，则$\pi v\in\pi U=UH$. 即存在某个$x_1\in U$使$\pi v=x_1H$，或$vH=x_1H$. 又$e\in H$，所以$v\in vH=x_1H$. 故存在$h\in H$使得$v=x_1h$. 即$v\in UH$. 因此$\pi^{-1}(\pi U)\subset UH$. 反之$UH$中任一元素可写成$xh$，其中$x\in U, h\in H$. 又$f(xh)=xhH=xH\in\pi(U)$. 所以$xh\in\pi^{-1}(\pi U)$，也就是$UH\subset\pi^{-1}(\pi U)$. 这就得到

$$\pi^{-1}(\pi U)=UH.$$

又U为开集，则UH为开集，即$\pi^{-1}(\pi U)$为开集，由G/H中的拓扑定义知πU为开集。也就是π为开映射.

(2)设xH，yH是G/H中二相异元. 即$xH\neq yH$，也就是$y^{-1}x\notin H$. 因H是闭的，得$G\setminus H$是开的，又因G是拓扑群，所以$x, y\to y^{-1}x$是连续的. 于是存在开集U，V使得$x\in U, y\in V$且$V^{-1}U\in G\setminus H$.

令$A=\pi U$，$B=\pi V$，由于$x\in U$，得$\pi x\in\pi U=A$，即$xH\in A$。

同样有$yH\in B$.又π是开映射.故A，B为开集．若能证明$A\cap B=\phi$，则G/H是Hausdorff空间．

事实上，若$A\cap B\neq\phi$．取$z\in A\cap B$，由$z\in A$知存在$u\in U$使得$\dot{z}=\dot{u}$，由$z\in B$知存在$v\in V$使$\dot{z}=\dot{v}$，于是得$\dot{u}=\dot{v}$或$uH=vH$．即$v^{-1}u\in H$，与$v^{-1}u\in G\setminus H$矛盾．

特别，若$H=\{e\}$，得$G/H=G$是Hausdorff空间．

(3)定义映射σ：$G\times G/H\to G/H$.

$$(x,\pi y)\to\pi xy.$$

或$\sigma(x,\pi y)=\pi xy$．若$W\subset G/H$是开集，$(a,\pi b)\in\sigma^{-1}(W)$，则$\pi(ab)\in W$，从而$ab\in\pi^{-1}(W)$，又乘法是连续的，故存在开集$U$和$V$，使得$a\in U$，$b\in V$且$UV\in\pi^{-1}(W)$．即

$$U\times\pi(V)\subset\sigma^{-1}(W).$$

因为π是开映射，$\pi(V)$是开的且$\pi b\in\pi(V)$．所以σ是连续的．定理得证．

为了进一步讨论G/H，需要引入正规子群的概念．前面曾将代数群G按子群H划分左傍集与右傍集．那末在什么条件下，左傍集与右傍集重合．若A既是左傍集又是右傍集，则$A=aH=Ha$．其中a是A中任一元素．也就是$a^{-1}Ha=H$．由此引入以下定义．

定义 7　H是代数群G的子群．若对每一个$h\in H$及每一个$a\in G$有$a^{-1}ha\in H$，即对每一个$a\in G$有$a^{-1}Ha=H$，则称H为群G的正规子群．

显然，$a^{-1}Ha=H$当且仅当$aH=Ha$，$\forall a\in G$．

定义 8　G是拓扑群．若

(1)H是群G的正规子群，

(2)H是拓扑空间G的子空间．

则称H为拓扑群G的一个正规子群．

定理 6　G是拓扑群，H是G的闭正规子群，则

(1)G/H是拓扑群．

(2)若G是局部紧的，则G/H也是局部紧的．

证 （1）在G/H中定义乘法：$xH\cdot yH=xyH$.或记为$\dot{x}\dot{y}=\dot{(xy)}$，其中$x$，$y\in G$。在这样的乘法运算下，容易验证$G/H$是一个群。事实上，由于$G$中元素满足结合律，故$G/H$中结合律是显然的。$H$是$G/H$的单位元素，$H(xH)=(xH)H=H$。且$xH$的逆元素为$x^{-1}H$，这是因为$(x^{-1}H)(xH)=(xH)(x^{-1}H)=H$。

又由定理5（2）知G/H是一个Hausdorff空间。若能证明群运算在拓扑空间中连续，则G/H就是一个拓扑群：

设W是G/H中的开集，且$\pi(a)\pi(b)^{-1}=ab^{-1}H\in W$，所以$ab^{-1}\in\pi^{-1}(W)$.由此知，存在开集$U$、$V$使得$a\in U$，$b\in V$．且$UV^{-1}\subset\pi^{-1}(W)$，即$\pi(U)\pi(V^{-1})\subset W$.由于$\pi$是开映射，$\pi(U)$，$\pi(V^{-1})$是$G/H$中的开集。$a\in U$，故$aH\in\pi(U)$．$b^{-1}\in V^{-1}$．因此$b^{-1}H\in\pi(V^{-1})=(\pi(V))^{-1}$．由此知$aH\in\pi(U)$，$bH\in\pi(V)$，且$\pi(U)\pi(V)^{-1}\subset W$。所以群运算$(\pi(x),\ \pi(y))\to\pi(x)\pi(y)^{-1}$是连续的.

以上证明了G/H是一个拓扑群，称为商群。

（2）设G是局部紧的，因而有单元e的某个开邻域U，使得U的闭包$\overline{U}$是紧的．又$\pi(e)=H$，得$H=\pi(e)\subset\pi(U)\subset\pi(\overline{U})$．因为$\pi$是连续的，故$\pi(\overline{U})$是紧的．$\pi(\overline{U})$是Hausdorff空间的紧子集，因而是闭的．$\pi(U)$为开集.所以$\overline{\pi(U)}\subset\pi(\overline{U})$．又$\overline{\pi(U)}$是紧空间的闭集，因而也是紧的．这就证明了存在单元$H$的开邻域$\pi(U)$，使$\overline{\pi(U)}$是紧的，故$G/H$是局部紧的．定理得证.

定理7 （同构定理）．设G_1，G_2是拓扑群，φ是G_1到G_2上的代数同态，且为连续的开映射，记$H=\ker\varphi=\{x\in G_1\,|\varphi(x)=e\}$。定义$\rho(\pi x)=\varphi(x)$是$G_1/H$到$G_2$的映射，则$\rho$是$G_1/H$到$G_2$上的同构映射，而且也是同胚的.

证 首先容易看出H是代数群G_1的子群．又若$x\in H$，$a\in G_1$，则

$$\varphi(a^{-1}xa)=\varphi(a^{-1})\varphi(x)\varphi(a)=\varphi(a^{-1})\varphi(a)=e.$$

所以$a^{-1}xa\in H$．故H为代数群G_1的正规子群.

又因为H是元素$e\in G_2$在连续映射φ下的原像，故H是拓扑空间

G_1的闭集，因此H是拓扑群G_1的正规子群.

π: $G_1 \to G/H$是连续的开映射，φ为G_1到G_2上的代数同态，故定义$\rho(\pi x)=\varphi(x)$是有确切意义的. 事实上，若$\pi x=\pi y$则$y^{-1}x\in H$，即$\varphi(y^{-1}x)=e$. 故有$\varphi(y)^{-1}\varphi(x)=e$. 所以$\varphi(y)=\varphi(x)$，即$\rho(\pi x)=\rho(\pi y)$.

又由于φ是G_1到G_2上的满射，且为代数同态，故以上定义的ρ是G_1/H到G_2上的满射，且为1-1的，同时保持代数运算，因而ρ是G_1/H到G_2上的同构映射.

再证明ρ和ρ^{-1}是连续的.

设开集$V\in G_2$，由于φ是连续的，$\varphi^{-1}(V)\in G_1$也是开的，又π是开映射，故$\pi(\varphi^{-1}(V))$是开的. 即$\rho^{-1}(V)=\pi(\varphi^{-1}(V))$是开的. 所以$\rho$是连续的.

设开集$U\in G_1/H$，由定义知$\pi^{-1}(U)$是开集，又φ是开映射，所以$\varphi(\pi^{-1}(U))$是开的. 即$\rho(U)=\varphi(\pi^{-1}(U))$是开的，故$\rho^{-1}$是连续的. 定理得证.

以上ρ是拓扑群G_1/H到拓扑群G_2上的映射，它是代数群G_1/H到代数群G_2上的同构映射，又是拓扑空间G_1/H到拓扑空间G_2上的同胚映射. 称ρ为拓扑群G_1/H到拓扑群G_2上的同构映射.

若两个拓扑群之间存在着同构映射，则称这两个拓扑群是同构的.

定理 8 若G是局部紧群，则必存在一个σ一紧的开子群G_0，G_0也是闭的.

证 设V是e的对称的紧的开邻域，由于乘法是连续的，故V^2，V^3，…，都是紧的. 令

$$G_0=V\cup V^2\cup V^3\cup\cdots\cdots$$

则显然G_0是G的一个子群，且由于$V^n(n=1, 2, \cdots)$都是紧的，故G_0是σ一紧的.

又$G_0=G_0V$，V是开的，故G_0是开的，又由定理3知G_0是闭的，证毕.

§6.3 局部紧拓扑群上不变Borel测度的存在性

本节将证明在任何一个局部紧拓扑群上，存在一个不变的正则Borel测度。Riesz表示定理指出，对于局部紧T_2空间G，若存在$C_c(G)$上的正线性泛函μ，则存在正则Borel测度$\tilde{\mu}$，使得$\mu f=\int_X f d\tilde{\mu}, f\in C_c(G)$.为此，只需证明在$C_c(G)$上存在唯一的正线性泛函$m$，且$m$是左(右)不变的.

定理 9 若G是局部紧拓扑群，则在$C_c(G)$上存在唯一的非零左不变的正线性泛函m。即$m\neq 0$是$C_c(G)$上的线性泛函，且满足

(1)$mf\geqslant 0$，当$f\in C_c(G)$且$f\geqslant 0$，

(2)$m(f_a)=mf$，当$f\in C_c(G)$，$a\in G$。

证 分两步证明定理。

(1)令$E=C_c^+(G)\setminus\{0\}=\{f:G\to[0,\infty)|\ f$是连续的，且具有紧支集，$f\neq 0\}$首先证明在$E$上存在左不变的正线性泛函，即有$m$: $E\to(0,\infty)$。满足

$$m(f_1+f_2)=mf_1+mf_2,\quad f_1,\ f_2\in E.$$
$$m(cf)=cmf,\qquad f\in E,\ C>0.$$
$$mf_a=mf,\qquad a\in G,\ f\in E.$$

为在E上定义m，分以下几步:

1) **引理 1** $f,g\in E$,对于每一个$x\in \mathrm{supp}f$,存在$c>0$,$a\in G$, $U\in\mathscr{N}_e$($\mathscr{N}_e$表示e的邻域族)，使得在xU上成立着$f\leqslant cg_a$。

证 由于g是紧集上的连续函数，故存在$b\in G$,使得$\|g\|_\infty=g(b)>0$。因此对f的支集中的某个x,一定可以找到$c>0$，使得$cg(b)>f(x)$。

由f的连续性知，一定存在x的某个邻域V，或e的某个邻域U，使得

$$cg(b)>f(y),\quad y\in xU\ (\text{或}y\in Ux).$$

再由g的连续性知，上式在b的邻域内也成立。又$g_{xb^{-1}}(y)=$

$g(bx^{-1}y)$，且当y在x的邻域中，则$bx^{-1}y$在b的邻域中，故有

$$cg_{xb^{-1}}(y)\geqslant f(y). \qquad y\in xU.$$

取$a=xb^{-1}$，则在xU上有$f\leqslant cg_a$. 引理得证.

按上述引理的结论，作$\{Ux\mid x\in \text{supp}f\}$；将$f$的支集覆盖住. 又$f$的支集是紧的，故存在$a_i$和$c_i$（$i=1,2,\cdots,n$），使得

$$f\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}.$$

事实上，若$x\in\text{supp}f$，则必有某个c_k，a_k，使得$f\leqslant c_k g_{a_k}\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}$. 若$x\notin\text{supp}f$.则$f=0$，上式自然成立。

2） **定义**$(f:g)$

$$(f:g)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}c_i \mid\ n\in N,\ c_i>0,\ a_i\in G,\ f\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}\right\}.$$

由以上引理1知，上式右方集合是非空的，且显然有$0\leqslant(f:g)<\infty$.

$(f:g)$具有以下性质：

(a) $(f:g)\geqslant\dfrac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}$.

证 由于f是紧集合上的连续函数，故存在$x_0\in G$，使得$\|f\|_\infty=f(x_0)$. 所以

$$\|f\|_\infty=f(x_0)\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}(x_0)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\|g\|_\infty,$$

又$\|g\|_\infty\neq0$，因此有$\dfrac{\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i$. 取下确界，即得所证.

(b) $(f_a:g)=(f:g)$，由定义显然成立。

(c) $(cf:g)=c(f:g)$，$c>0$，显然成立。

(d) $(f_1+f_2:g)\leqslant(f_1:g)+(f_2:g)$ （次可加性）.

证 任给 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon+(f_1:g)>\sum_{i=1}^{n}c_i,\quad \text{其中 } f_1\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}.$$

又
$$\varepsilon+(f_2:g)>\sum_{j=1}^{m}d_j,\quad \text{其中 } f_2\leqslant\sum_{j=1}^{m}d_j g_{b_j}.$$

相加得
$$2\varepsilon+(f_1:g)+(f_2:g)>\sum_{i=1}^{n}c_i+\sum_{j=1}^{m}d_j.$$

而
$$f_1+f_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}+\sum_{j=1}^{m}d_j g_{b_j},$$

所以
$$(f_1+f_2:g)\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i+\sum_{j=1}^{m}d_j<(f_1:g)+(f_2:g)+2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，即得所证。

(e) 若 $f_1\leqslant f_2$，则 $(f_1:g)\leqslant(f_2:g)$。显然成立。

(f) $(f:h)\leqslant(f:g)(g:h)$。

证 若 $f\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i g_{a_i}$，$g\leqslant\sum_{j=1}^{m}d_j h_{b_j}$，则

$$g_{a_i}\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{m}d_j h_{b_j}\Big)_{a_i}=\sum_{j=1}^{m}d_j h_{a_i b_j},$$

于是
$$f\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_i d_j h_{a_i b_j}.$$

所以
$$(f:h)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_i d_j=\Big(\sum_{i=1}^{n}c_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m}d_j\Big)$$
$$\leqslant(f:g)(g:h).$$

(g) $(f:f)=1$.

证 因为 $f=1\cdot f$，所以 $(f:f)\leqslant 1$. 又 $(f,f)\geqslant\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_\infty}=1$.

故$(f:f)=1$.

以上定义的$(f:g)$满足次可加性，而不是可加性．为利用$(f:g)$定义m，必须改进次可加性.

3）固定$h\in E$，对于f，$g\in E$定义

$$mg(f)=\frac{(f:g)}{(h:g)},$$

由于$(f:g)\leqslant(f:h)(h:g)$．得$mg(f)\leqslant(f:h)$，又由于$(h:g)\leqslant(h:f)(f:g)$．所以$mg(f)\geqslant\frac{1}{(h:f)}$．即

$$mg(f)\in\left[\frac{1}{(h:f)},\ (f:h)\right],\ (\text{与}g\text{无关}).$$

因此$mg(f)\neq 0$．对于每一个f，闭区间$\left[\frac{1}{(h:f)},(f:h)\right]$是紧的，由Tychonoff定理知

$$S=\prod_{f\in E}\left[\frac{1}{(h:f)},\ (f:h)\right]$$

是紧的Hausdorff空间，对于一切$g\in E$，mg可以看成S中一点，$mg(f)$就是mg的f坐标．mg具有以下性质：

（a）mg是左不变的.

$$mg(f_a)=\frac{(f_a:g)}{(h:g)}=\frac{(f:g)}{(h:g)}=mg(f).$$

（b）mg是正齐次的.

$mg(cf)=cmg(f)$．$c>0$，显然成立.

（c）mg是次可加的.

$mg(f_1+f_2)\leqslant mg(f_1)+mg(f_2)$.

由$(f:g)$的次可加性．显然成立.

（d）**引理2**　f_1．$f_2\in E$，任给$\varepsilon>0$，存在$V\in\mathcal{N}_e$，对于支集

在V中的一切$g\in E$，有

$$(1+\varepsilon)mg(f_1+f_2)\geqslant mg(f_1)+mg(f_2).$$

证 令$f=f_1+f_2$，$f_0\in E$，且在f的支集上$f_0=1$．令$\delta>0$，且满足$\delta(f_0:f)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$，其中$\varepsilon>0$是给定的．定义

$$h_i(x)=\begin{cases}\dfrac{f_i(x)}{f(x)+\delta f_0(x)}, & 当 f_i(x)\neq 0,\\ 0, & 当 f_i(x)=0,\end{cases}\quad (i=1,\ 2).$$

显然$h_i(x)\in E$且$\operatorname{supp}h_i=\operatorname{supp}f_i$．由定理2知$h_i(x)$是一致连续的．任给$\varepsilon_1>0$，存在$V\in\mathcal{N}_e$．当$x^{-1}y\in V$有

$$|h_i(x)-h_i(y)|<\varepsilon_1. \qquad (i=1,\ 2)$$

令 $g\in E$，$\operatorname{supp}g\subset V$且$f\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_jg_{a_j}$．则

$$f_i=(f+\delta f_0)h_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_jh_ig_{a_j}+\delta h_if_0, \qquad (i=1,\ 2)$$

又由定义知$h_i\leqslant 1$所以

$$f_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_jh_ig_{a_j}+\delta f_0. \qquad (i=1,\ 2)$$

若x使$g_{a_j}(x)\neq 0$，即$g(a_j^{-1}x)\neq 0$．也就是$a_j^{-1}x\in\operatorname{supp}g\subset V$，则

$$|h_i(x)-h_i(a_j)|<\varepsilon_1, \qquad (i=1,\ 2)$$

所以

$$f_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j[h_i(a_j)+\varepsilon_1]g_{a_j}+\delta f_0. \qquad (i=1,\ 2).$$

由于$(g_{a_j}:g)=1$，得

$$(f_i:g)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j[h_i(a_j)+\varepsilon_1]+\delta(f_0:g), \qquad (i=1,2)$$

因此

$$(f_1:g)+(f_2:g)\leqslant\sum_{j=1}^{n}c_j[h_1(a_j)+h_2(a_j)+2\varepsilon_1]+2\delta(f_0:g).$$

由h_i的定义容易看出$h_1(a_j)+h_2(a_j)\leqslant 1$，所以

$$(f_1:g)+(f_2:g)\leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j(1+2\varepsilon_1)+2\delta(f_o:g).$$

由$(f:g)$的定义及$(f_o:g)\leqslant(f_o:f)(f:g)$，得

$$(f_1:g)+(f_2:g)\leqslant(1+2\varepsilon_1+2\delta(f_o:f))(f:g).$$

取$\varepsilon_1\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$，又$\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{4(f_o:f)}$，得

$$(f_1:g)+(f_2:g)\leqslant(1+\varepsilon)(f:g).$$ 引理得证。

4) 对于每一个$V\in\mathscr{N}_e$，令

$$K_V=Cl\{mg|\ \mathrm{supp}g\subset V\}.$$

由于 $$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n=V\in\mathscr{N}_e.$$

故$K_V\subset K_{V_i}$，($i=1,2,\cdots,n$)。由Urysohn引理知$K_V\neq\phi$。这表明K_V具有有限交性质，即

$$K_{V_1}\cap K_{V_2}\cap\cdots\cap K_{V_n}\neq\phi.$$

又因为S是紧空间，K_V是闭的，故

$$\bigcap_{V\in\mathscr{N}_e} K_V\neq\phi.$$

令 $$m\in\bigcap_{V\in\mathscr{N}_e} K_V.$$

则m具有以下性质.

(a) $m(f_a)=m(f)$.

证 $m\in\bigcap_{V\in\mathscr{N}_e} K_V$。$S$上的拓扑是取乘积空间的拓扑，对于任给的$\varepsilon>0$，取$m$的邻域为

$$U\{s\in S\ |\ |s(f_a)-m(f_a)|<\varepsilon,\quad |s(f)-m(f)|<\varepsilon\}.$$

由于m是集合$\{mg\ |\mathrm{supp}g\subset V\}$的极限点，故$U$中必有该集合中的元素，即存在$g\in E$，使得

$$|mg(f)-m(f)|<\varepsilon,\quad |mg(f_a)-m(f_a)|<\varepsilon.$$

又$mg(f)=mg(f_a)$，所以

$$|m(f)-m(f_a)|<2\varepsilon$$

又ε是任意的，故得$m(f_a)=m(f)$。

(b) $m(cf)=cm(f)$，$c>0$。

证明与(a)相似。

(c) $m(f_1+f_2)=m(f_1)+m(f_2)$。

证 因为$mg(f_1+f_2)\leqslant mg(f_1)+mg(f_2)$，故有

$$m(f_1+f_2)\leqslant m(f_1)+m(f_2).$$

又由3)知，任给$\varepsilon>0$，存在$V\in\mathcal{N}_e$，当$g\in E$且$\mathrm{supp}g\subset V$，

有 $$(1+\varepsilon)mg(f_1+f_2)\geqslant mg(f_1)+mg(f_2),$$

所以 $$(1+\varepsilon)m(f_1+f_2)\geqslant m(f_1)+m(f_2).$$

由ε的任意性即得所证。

总结以上讨论，m就是E上非零的左不变正线性泛函。

(2) 将泛函m扩张到$C_c(G)$空间上。

当$f=0$，定义$m(0)=0$。

当$f\in C_c(G)$是实值函数，则$f=f^+-f^-$，定义

$$m(f)=m(f^+)-m(f^-).$$

$f\in C_c(G)$是复值函数，$f=u+iv$，定义

$$m(f)=m(u)+im(v).$$

这样定义的m就是$C_c(G)$上非零的左不变正线性泛函，由Riesz表示定理知

$$mf=\int_G f\mathrm{d}m,\quad f\in C_c(G)$$

就是一个左不变的Haar积分。

下面证明m的唯一性。为此先证明以下两个引理。

引理3 若$f\in C_c(G)$，则任给$\varepsilon>0$，存在$U_f\in\mathcal{N}_e$使得对一切$x\in U_f$，有

$$\int_G|f(xy)-f(y)|\mathrm{d}m(y)<\varepsilon,$$

及

$$\int_G|f(yx)-f(y)|\mathrm{d}m(y)<\varepsilon.$$

证 只证第一式，第二式的证明完全类似.

由$f\in C_0(G)$知f是一致连续的．任给$\varepsilon'>0$存在$V_1\in\mathscr{N}_e$，当$x\in V_1$，$y\in G$，有$|f(x\ y)-f(y)|<\varepsilon$.

$\operatorname{supp}f=K$是紧集，m是正测度，因此任给$\varepsilon''>0$，存在开集$U\supset K$，使得$mU<mK+\varepsilon''$．再根据§6.1拓扑群性质(8)知

$$V_\varepsilon=\{x\in G\,|xK\subset U\}$$

是开集，又$e\in V_\varepsilon$．故$V_\varepsilon\in\mathscr{N}_e$．令$V\equiv V_1\cap V_\varepsilon$，并且假设$V=V^{-1}$．否则缩小$V$而得$e$的对称邻域.

若$x\in V$，则对一切$y\in G$，有$|f(x\ y)-f(y)|<\varepsilon'$且$xK\subset U$，$x^{-1}K\subset U$.

当$x\in V$，若$f(x\ y)\neq 0$，则$xy\in K$，$y\in x^{-1}K\subset U$．若$f(y)\neq 0$，则$y\in K\subset U$.

若$y\notin U$，则$f(y)=0$，且$f(x\ y)=0$（否则$y\in U$）．所以

$$\int_G|f(xy)-f(y)|\,dm(y)=\int_U|f(xy)-f(y)|\,dm(y)<\varepsilon' m(U)$$
$$<\varepsilon'(mk+\varepsilon'')<\varepsilon.$$

引理得证.

引理4 设m是G上左不变的正的正则测度，$u\subset G$是非空开集，则$m(u)>0$.

证 用反证法．设$m(u)=0$．若K是一个紧集，则必有$K\subset\bigcup\{au\,|a\in G\}$.

事实上，若$k\in K$，取$u_0\in u$，令$a=ku_0^{-1}$，则$k=au_0\in au$．由此知$\bigcup\{au\,|a\in G\}$是K的一个开覆盖，又K是紧集，故存在a_1，a_2，…，$a_n\in G$使得

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n}a_iu.$$

所以 $mK\leqslant\sum_{i=1}^{n}m(a_iu)$．又$m$是左不变的$m(a_iu)=m(u)=0$.

故$mK=0$，即对一切紧集K有$mK=0$．又

$$mG=\sup\{mK\,|K\subset G\text{且}K\text{为紧集}\},$$

因此$mG=0$．即$m=0$．此与$m\neq 0$矛盾．所以$m(u)>0$．

（3）唯一性．设n是$C_c(G)$上另一个左不变非零正线性泛函．则存在$c>0$，使得$m=cn$．

只需在集合E上证明即可．即只需证明，若f，$g\in E$，则

$$\frac{mf}{nf}=\frac{mg}{ng}=C．$$

若f，$g\in E$，利用m，n是左不变的，有

$$mf\cdot nh=\iint f(y)h(x)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x)$$

$$=\iint f(xy)h(x)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x).$$

$$mh\cdot nf=\iint h(y)f(x)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x)$$

$$=\iint h(x^{-1}y)f(x)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x).$$

若记$h^0(x)=h(x^{-1})$，则

$$mh\cdot nf=\iint h^0(y^{-1}x)f(x)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x)$$

$$=\iint h^0(x)f(yx)\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x).$$

若取h使$h^0(x)=h(x)$，也就是取h满足$h(x^{-1})=h(x)$，

则 $$mf\cdot nh-mh\cdot nf=\iint h(x)(f(xy)-f(yx))\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x).$$

所以 $$|mf\cdot nh-mh\cdot nf|\leqslant\iint h(x)\,|f(xy)-f(yx)|\,\mathrm{d}m(y)\mathrm{d}n(x).$$

$f\in C_c(G)$，由引理3知，任给$\varepsilon'>0$，存在$U_f\in\mathscr{N}_e$，对于一切$x\in U_f$，有

$$\int_G |f(xy)-f(y)|\,dm(y)<\varepsilon',$$

$$\int_G |f(yx)-f(y)|\,dm(y)<\varepsilon'.$$

再取 h 使 $\mathrm{supp}h\subset U_f$，则当 $x\notin U_f$，$h=0$，所以

$$|mf\cdot nh-mh\cdot nf|\leqslant\iint h(x)(|f(xy)-f(y)|$$

$$+|f(yx)-f(y)|)dm(y)dn(x)$$

$$\leqslant 2\varepsilon'\int_{U_f}h(x)dn(x)=2\varepsilon' nh.$$

为对称起见，若 $nf\neq 0$ 令 $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}nf$，则有

$$|mf\cdot nh-mh\cdot nf|\leqslant\varepsilon nf\cdot nh.$$

现在利用引理 4 证明 $nf\neq 0$，$nh\neq 0$。事实上 $f\in E$，即 $f\geqslant 0$。故至少存在一个非空集合 D，在 D 上 $f>\beta>0$。故 $nf=\int_G f dn>\beta\cdot nI\neq 0$。同理 $nh\neq 0$，故以上不等式可写成

$$\left|\frac{mf}{nf}-\frac{mh}{nh}\right|<\varepsilon.$$

总结以上讨论知，对于 $f\in E$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $U_f\in\mathcal{N}_e$。当 $h\in E$ 且 $h(x)=h(x^{-1})$，$\mathrm{supp}h\subset U_f$，有

$$\left|\frac{mf}{nf}-\frac{mh}{nh}\right|<\varepsilon.$$

以上所要求的 h 是存在的．事实上，不妨取邻域 U_f 是对称的，根据Urysohn引理知，存在 $h_1\in E$，使得 $\mathrm{supp}h_1\subset U_f$。令

$$h(x)=\frac{1}{2}(h_1(x)+h_1(x^{-1}))$$

即为所求。同理对于 $g\in E$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $U_g\in\mathcal{N}_e$，当 $h\in E$ 且 $h(x)=h(x^{-1})$，$\mathrm{supp}h\subset U_g$，有

$$\left|\frac{mg}{ng}-\frac{mh}{nh}\right|<\varepsilon.$$

若取$h\in E$，满足$h(x)=h(x^{-1})$，$\operatorname{supp}h\subset U_f\cap U_g$，则

$$\left|\frac{mf}{nf}-\frac{mg}{ng}\right|\leqslant\left|\frac{mf}{nf}-\frac{mh}{nh}\right|+\left|\frac{mg}{ng}-\frac{mh}{nh}\right|<2\varepsilon.$$

所以，
$$\frac{mf}{nf}=\frac{mg}{ng},\quad \forall f,\ g\in E.$$

即$\dfrac{mf}{nf}=c$。也就是$m=cn$。　　　定理得证。

由定理 9 及Riesz表示定理，得以下结论。

定理10　设G是局部紧拓扑群，则在G上存在唯一的左不变正则Borel测度。

从定理 8 的证明中看出，以上所定义的局部紧群G上的Borel测度m是左不变的且对任何非空开集U有$m(U)>0$，也称m为左Haar测度。

例如，由实数组成的可加的局部紧群和Lebesgue测度，对任一非空开集，其Lebesgue测度为正，且任何集的Lebesgue测度关于左（右）平移是不变的，因此Lebesgue测度是Haar测度。

注 1　由引理 3 知，若$f\in C_c(G)$，则$\varphi: x\to f_x$是$G\to L^1(G,m)$的连续映射。

事实上，由引理 3 知，任给$\varepsilon>0$，存在$U\in\mathscr{N}_e$，当$x\in U$有$\|f_x-f\|_1=\int_G|f(xy)-f(y)|\,dm(y)<\varepsilon$。

以上只用到了f的一致连续性。由于$C_\infty(G)$中的函数也是一致连续的，故若$f\in C_\infty(G)$，则$x\to f_x$也是连续映射。

注 2　若$f\in L^1(G,m)$，则映射φ：$x\to f_x$也是连续的。

事实上，$L^1(G,m)$中的函数都可以用$C_c(G)$中的函数逼近，即对$f\in L^1(G,m)$，任给$\varepsilon>0$，存在$k\in C_c(G)$，使得$\|f-k\|_1<\varepsilon$，又

$$\| f-f_x \|_1 \leqslant \| f-k \|_1 + \| k-k_x \|_1 + \| k_x-f_x \|_1.$$

由于$x \to k_x$是连续的，$\| k-k_x \|_1 < \varepsilon$，又$\| k_x-f_x \|_1 < \varepsilon$，所以$x \to f_x$是连续的。

同理，若$f \in L^P(G,m)(1 \leqslant P < \infty)$，$x \to f_x$也是连续的。但对于$f \in L^\infty(G)$，上述结论不成立。

注 3 $C_c(G)$是$C_\infty(G)$的子集，$C_c(G)$按其范数完备化，即得$C_\infty(G)$。故$C_c(G)$上的有界线性泛函可以扩张到$C_\infty(G)$上，反之$C_\infty(G)$上的有界线性泛函限制在$C_c(G)$上，就是$C_c(G)$上的有界线性泛函，但是作为不变测度m，对应于$C_c(G)$上的正线性泛函是左不变的，不一定有界，所以不一定能扩张到$C_\infty(G)$上。即mf不一定有意义。

例 若$G = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{C}$。

(1)在G中定义乘法

$$(\alpha,\beta)(\alpha',\beta') = (\alpha\alpha',\alpha\beta'+\beta),$$

其中$\alpha,\alpha' \in \boldsymbol{T}$，$\beta,\beta' \in \boldsymbol{C}$，则$G$是一个拓扑群。

(2)定义$f((\alpha,\beta)) = \beta$，则$f$是右一致连续的，但不是左一致连续的。

证 (1)将G中元素(α,β)和2×2矩阵$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$相对应，且$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \neq 0$. 又由于

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & \alpha\beta'+\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

与G中乘法相吻合，$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\boldsymbol{C})$，故$\left\{\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \boldsymbol{T}, \beta \in \boldsymbol{C}\right\}$是$GL(2,\boldsymbol{C})$的子群. 即$G$是一个拓扑群，且是闭子群。

(2) $f((\alpha,\beta)) = \beta$，有

$$\begin{aligned} & |f((\alpha,\beta)) - f((\alpha,\beta)(\alpha',\beta'))| \\ & = |f((\alpha,\beta)) - f((\alpha\alpha',\alpha\beta'+\beta))| \\ & = |\beta - \alpha\beta' - \beta| = |\alpha||\beta'| = |\beta'| \qquad (\alpha \in \boldsymbol{T},\ |\alpha| = 1). \end{aligned}$$

又G中单元为$e = (1,0)$，当$(\alpha',\beta') \in U_e \in \mathscr{N}_e$，则$|\beta'|$很

小，故任给 $\varepsilon>0$，存在$U_e\in\mathscr{N}_e$，当$(\alpha',\beta')\in U_e$，有 $|f((\alpha,\beta))-f((\alpha,\beta)(\alpha',\beta'))|<\varepsilon$。故 f 右一致连续.

但
$$\begin{aligned}&|f((\alpha,\ \beta))-f((\alpha',\ \beta')(\alpha,\ \beta))|\\&=|f((\alpha,\ \beta))-f((\alpha'\alpha,\ \alpha'\beta+\beta'))|\\&=|\beta-\alpha'\beta-\beta'|=|(1-\alpha')\beta-\beta'|,\end{aligned}$$
因此，任给 $\varepsilon>0$，无论(α',β')如何靠近 e，总可以取β，使$|\beta|$相当大，$|(1-\alpha')\beta-\beta'|\nless\varepsilon$。所以 f 不是左一致连续的.

最后指出，在拓扑群G上考虑积分，Fubini定理往往不成立。例如研究积分
$$\iint_G\chi_\Delta(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中$G=X\times Y$，$X=\boldsymbol{R}$，$Y=\boldsymbol{R}$. $\triangle$是乘积空间$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$的对角线，即$\triangle=\{(x,y)\,|x=y\}$。若在$X=\boldsymbol{R}$上取通常拓扑，在$Y=\boldsymbol{R}$上取离散拓扑，则
$$\int_Y\left(\int_X\chi_\Delta(x,\ y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_Y 0\cdot\mathrm{d}y=0,$$
$$\int_X\left(\int_Y\chi_\Delta(x,\ y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_X 1\cdot\mathrm{d}x=\infty.$$
Fubini定理不成立.这是因为Fubini定理要求测度是σ—有限的，而在y上取计数测度显然不是σ—有限的。若在上例中，取$y=Q$是全体有理数的集合，且取计算测度，则为σ—有限的。这时
$$\int_Y\chi_\Delta(x,\ y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$
所以$\int_X\left(\int_Y\chi_\Delta(x,\ y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=0$. Fubini 定理成立。

对于局部紧群G，若$f\in L^1(G)$，则 f 必在一个σ—紧集外为零，所以 f 在G上的积分实质上是在一个σ—紧集上的积分，又由于测度为正则Borel测度，紧集的测度为有限的，故测度必为σ—

有限的；因此对于局部紧群上的可积函数总可以应用Fubini定理。由定理8知，对于局部紧群G，必存在一个σ—紧的开子群。我们常常在子群上考虑积分。

§6.4 模函数

G是局部紧群，G上存在唯一的左Haar测度m，若$k\in C_0(G)$，$m(k)=\int_G k(x)\mathrm{d}m(x)$且$m(k_a)=m(k)$。

本节研究积分$\int_G k(xa^{-1})\mathrm{d}m(x)$。由于

$$\int_G k_b(xa^{-1})\mathrm{d}m(x)=\int_G k(xa^{-1})\mathrm{d}m(x),$$

亦即$\int_G k(xa^{-1})\mathrm{d}m(x)$是左不变的，故存在$\Delta(a)$使得

$$\int_G k(xa^{-1})\mathrm{d}m(x)=\Delta(a)\int_G k(x)\mathrm{d}m(x).$$

显然$\Delta(a)$不依赖于m。因为若取测度n，则必有$n=cm$，上式两端同乘以c，则得

$$\int_G k(xa^{-1})\mathrm{d}n(x)=\Delta(a)\int_G k(x)\mathrm{d}n(x).$$

注意到上式对一切$k\in C_c(G)$成立，自然对所有可积函数也成立。

$\Delta(a)$具有以下性质：

(1) $0<\Delta(a)<\infty$，显然成立。

(2) $\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b)$。

证 $\Delta(ab)\int_G k(x)\mathrm{d}m(x)=\int_G k(x(ab)^{-1})\mathrm{d}m(x)$

$$=\int_G k((xb^{-1})a^{-1})\mathrm{d}m(x)=\Delta(a)\int_G k(xb^{-1})\mathrm{d}m(x)$$

$$=\Delta(a)\Delta(b)\int_G k(x)\mathrm{d}m(x).$$

所以 $$\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b).$$

(3) Δ是连续的.

证 Δ是G到$(0,\infty)$的映射：$a\to\Delta(a)$. 又Δ保持乘法，故若在$(0,\infty)$中考虑乘法群，则Δ是$G\to(0,\infty)$的代数同态. 由于拓扑群是齐性的，故只需证明$\Delta(a)$在e处连续. 因为

$$\int_G k(xa^{-1})\,\mathrm{d}m(x)-\int_G k(x)\mathrm{d}m(x)$$

$$=(\Delta(a)-\Delta(e))\int_G k(x)\mathrm{d}m(x),$$

$k(x)\in C_0(G)$，$k(x)\geqslant 0$，当$k(x)\neq 0$，则$\int_G k(x)\mathrm{d}m(x)\neq 0$. 又由引理3知，任给$\varepsilon>0$，存在$U\in\mathcal{N}_e$，当$a^{-1}\in U$，有

$$\int_G |k(xa^{-1})-k(x)|\mathrm{d}m(x)<\varepsilon.$$

所以 $$|\Delta(a)-\Delta(e)|<\varepsilon\Big/\int_G k(x)\mathrm{d}m(x)$$

因此，$\Delta(a)$是连续的.

m是左Haar测度，E是Borel集合，则$m(aE)=m(E)$，现在研究$m(Ea)$和$m(E)$的关系.

$$m(Ea)=\int_G \chi_{Ea}(x)\mathrm{d}m(x).$$

又$x\in Ea$，当且仅当$xa^{-1}\in E$. 所以

$$m(Ea)=\int_G \chi_E(xa^{-1})\mathrm{d}m(x)$$

$$=\Delta(a)\int_G \chi_E(x)\mathrm{d}m(x)=\Delta(a)m(E).$$

即从集合的测度来看$\Delta(a)$满足$m(Ea)=\Delta(a)m(E)$. 由此得出

$$\int f(x)\Delta(x)^{-1}\mathrm{d}m(x)=\int f(x^{-1})\mathrm{d}m(x).$$

利用上式容易证明以下事实.

(1)若$f\in L^1(G,m)$, 则$f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\in L^1(G,m)$, 且

$$\int f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}m(x)=\int f(x)\mathrm{d}m(x).$$

(2)$\Delta^{-1}m$是右Haar测度. (读者自证).

定义 9 Δ称为G上的模函数. 若对一切$x\in G$, $\Delta(x)=1$, 则称G为么模群.

定理11 交换群, 离散群和紧群都是么模群.

证 若G是交换群, 显然$\Delta=1$. 若G是离散群, 则计算测度就是Haar测度, 故$\Delta=1$. 若G是紧群, 则$\Delta:G\to(0,\infty)$是连续的$\Delta(G)$是$(0,\infty)$的一个紧子群. 又

$$\Delta(a)m(G)=m(Ga)=m(G),$$

而且$0<m(G)<\infty$, 所以$\Delta(a)=1$对一切$a\in G$成立, 即$\Delta=1$.

例 $G\{(x,y)\mid x>0,\ y\in \boldsymbol{R}\}$, 将$G$中元素$(x,y)$和矩阵$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}$相对应, 按矩阵乘法定义$G$中的乘法, 由于

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & (x')^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xx' & xy'+y(x')^{-1} \\ 0 & (xx')^{-1}\end{pmatrix},$$

G中乘法定义为$(x,y)(x',y')=(xx',xy'+y(x')^{-1})$. 于是$G=\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}\subset GL(2,\boldsymbol{R})$.

现在考虑测度$x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若$f\in C_c(G)$, 定义

$$mf=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}f(x,\ y)x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$f((a,\ b)(x,\ y))=f(ax,\ ay+bx^{-1}).$$

令$s=ax$, $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}x$, 得

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(ax,\ ay+bx^{-1})x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(s,\ ay+bas^{-1})as^{-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

再令$t=ay+bas^{-1}$，则$\mathrm{d}t=a\mathrm{d}y$，于是得到

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(s,\quad)s^{-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

即 $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f((a,b)(x,y))x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(x,\ y)x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

积分为左不变的。

又 $$f((x,\ y)(a,\ b))=f(xa,\ xb+ya^{-1}),$$

令$s=xa$，得

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(xa,\ xb+ya^{-1})x^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(s,\ sa^{-1}b+ya^{-1})as^{-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

再令 $t=sa^{-1}b+ya^{-1}$，$\mathrm{d}t=a^{-1}\mathrm{d}y$得

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}f(s,\ t)a^{2}s^{-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=a^{2}mf.$$

所以 $$\Delta(a,\ b)=(a^{2})^{-1}=a^{-2}.$$

§6.5 测度代数$M(G)$

这一节研究局部紧群G上所有有界Porel测度的集合$M(G)$。显然$M(G)$是一个线性空间。今在$M(G)$上引入对合。若E是G中的Borel集，$\mu\in M(G)$。首先定义μ'：$\mu'(E)=\mu(E^{-1})$。则保持加法且周期为2。即

$$(\mu+\nu)'=\mu'+\nu' \quad \mu''=\mu$$

为适合对合中的数乘规律，定义$\tilde{\mu}$如下：

$$\tilde{\mu}(E)=\overline{\mu'(E)}=\overline{\mu(E^{-1})}.$$

则$\tilde{\mu}$满足

$$(\mu+\nu)^{\sim}=\tilde{\mu}+\tilde{\nu},\ (\alpha\mu)^{\sim}=\bar{\alpha}\tilde{\mu},\ \tilde{\tilde{\mu}}=\mu.$$

若$f\in L^1(G,m)$，考虑测度$f\cdot m$即$k\to\int kf\mathrm{d}m$。由于$\int|f|\mathrm{d}m<\infty$，故$f\cdot m$是有限测度，$f\cdot m\in M(G)$。由以上定义

$$(f\cdot m)'(E)=(f\cdot m)(E^{-1})=\int\chi_{E^{-1}}(x)f(x)\mathrm{d}m(x)$$

$$=\int\chi_{E^{-1}}(x^{-1})f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}m(x)$$

$$=\int\chi_E(x)f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}m(x).$$

即 $$(f\cdot m)'=f(x^{-1})\Delta(x^{-1})m.$$

今定义 $$f'(x)=f(x^{-1})\Delta(x^{-1}),$$

则$(f\cdot m)'=f'\cdot m$且由§6.4知$f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\in L^1(G,m)$. 同样定义 $$\tilde{f}(x)=\overline{f'(x)}=\overline{f(x^{-1})\Delta(x^{-1})}$$

则映射$f\in L^1(G,m)\to f\cdot m\in M(G)$满足

(1) $f+g\longrightarrow(f+g)\cdot m,\ \alpha f\longrightarrow(\alpha f)\cdot m=\alpha f\cdot m,$

(2) $\|f\|_1=\int|f|dm,$

$\|f\cdot m\|=|f\cdot m|(G)=\int|f|dm=\|f\|_1,$

(3) $\tilde{f}\longrightarrow(f\cdot m)^{\sim}=\tilde{f}\cdot m$ (因为 $\tilde{f}=\overline{f'(x)}$, $\tilde{\mu}=\overline{\mu'}$).

因此$f\to f\cdot m$是$L^1(G,m)\to M(G)$的代数同态，保持对合. $M(G)=C_c(G)^*=C_\infty(G)^*$，$M(G)$是一个Banach空间. $L^1(G,m)$是$M(G)$的一个闭子空间. 在$M(G)$上再引入乘法，使$M(G)$成为一个Banach代数。

设$\mu,\nu\in M(G)$，以α记G中的乘法，$\alpha(x,y)=xy$，$(x,y\in G)$. 若$k\in C_c(G)$，则$k\circ\alpha$是有界连续函数，$\mu*\nu$是乘积空间$G\times G$上的有

限测度．则对积分$\int_{G\times G}k\circ\alpha(x,y)\mathrm{d}(\mu*\nu)(x,y)$可以应用Fubini定理得

$$\int_{G\times G}k\circ\alpha(x,y)\mathrm{d}(\mu*\nu)(x,\ y)=\int_G\int_G k(xy)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$$

$$=\int_G\int_G k(xy)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x).$$

今定义 $$(\mu*\nu)k=\int_{G\times G}k\circ\alpha(x,y)\mathrm{d}(\mu*\nu)(x,y).$$

容易验证$\mu*\nu$是$C_0(G)$上的有界线性泛函．事实上，

$$(\mu*\nu)(k+h)=(\mu*\nu)k+(\mu*\nu)h,$$

显然．

$$(\mu*\nu)(\alpha k)=\alpha(\mu*\nu)k,$$

$$|(\mu*\nu)k|\leqslant\int_G\int_G|k(xy)|\mathrm{d}|\mu|(x)\mathrm{d}|\nu|(y)$$

$$\leqslant\|k\|_\infty\|\mu\|\ \|\nu\|.$$

所以 $$\|\mu*\nu\|\leqslant\|\mu\|\ \|\nu\|.$$

即$\mu*\nu\in C_0(G)^*=M(G)$．再研究乘法$\mu*\nu$．容易证明必满足乘法的运算规律．

$$(\mu*\nu)*\omega=\mu*(\nu*\omega),$$
$$(\mu+\nu)*\omega=\mu*\omega+\nu*\omega,$$
$$\mu*(\nu+\omega)=\mu*\nu+\mu*\omega,$$
$$\alpha(\mu*\nu)=(\alpha\mu)*\nu=\mu*(\alpha\nu).$$

现只证结合律．

$$[(\mu*\nu)*\omega]k=\iint k(xy)\mathrm{d}(\mu*\nu)(x)\mathrm{d}\omega(y),$$

又 $$\int h(x)\mathrm{d}(\mu*\nu)(x)=\int h(st)\mathrm{d}\mu(s)\mathrm{d}\nu(t),$$

所以 $$[(\mu*\nu)*\omega]k=\iiint k(sty)\mathrm{d}\mu(s)\mathrm{d}\nu(t)\mathrm{d}\omega(y).$$

$$[\mu*(\nu*\omega)]k=\iint k(xy)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}(\nu*\omega)(y)$$

$$=\iiint k(xst)\mathrm{d}\nu(s)\mathrm{d}\omega(t)\mathrm{d}\mu(x),$$

因此结合律成立．按以上卷积引入的乘法，$M(G)$成为一个Banach代数，称为G上的测度代数．

$$令M_a(G)=\{f,\ m\,|f\in L^1(G,\ m)\},$$

则$M_a(G)$与$L^1(G)$完全相同，$M_a(G)$是$M(G)$的一个闭子空间，在定义了乘法后$M(G)$是一个Banach代数．下面将证明$M_a(G)$不仅是一个闭子代数而且是一个理想．

设$\mu\in M(G)$，$f,m\in M_a(G)$，那么$\mu*f,m=?$．若k是有界Borel函数，则

$$(\mu*f,m)k=\iint k(xy)f(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y$$

$$=\iint k(y)f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y.$$

若令 $$h(y)=\int f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(x),$$

则得 $$(\mu*f,\ m)k=\int k(y)h(y)\mathrm{d}y.$$

取$k=1$，得 $$(\mu*f,m)\cdot 1=\int h(y)\mathrm{d}y.$$

由此知$\int h(y)\mathrm{d}y$存在．由于μ是正测度．若$f\geqslant 0$，由h的定义知h是正的，故$\int|h|\,\mathrm{d}y$存在．所以$h\in L^1(G)$．若h是实函数，利用$h=h^+-h^-$，$|h|=h^++h^-$；若h是复函数，令$h=u+\mathrm{i}v$，即知$h\in L^1(G)$几乎处处存在．

所以

$$\mu*f,m=h,m,\qquad h\in L^1(G),$$

即$M(G)*M_a(G)\subset M_a(G)$。$M_a(G)$是$M(G)$中的左理想。

设$f\in L^1(G)$，$\nu\in M(G)$，研究$f,m*\nu$.

$$(f,m*\nu)k=\iint k(xy)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\nu(y).$$

利用等式 $\int f(xy^{-1})\,\mathrm{d}x=\Delta(y)\int f(x)\mathrm{d}x$,

得 $\int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x$. $(\Delta(y^{-1})=\Delta(y)^{-1})$

所以 $$(f,m*\nu)k=\iint k(x)f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}\nu(y).$$

令 $$r(x)=\int f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})\mathrm{d}\nu(y).$$

同样可以证明$r(x)$几乎处处存在，且$r(x)\in L^1(G)$. 因此

$$f,mx\nu=r,m,\qquad r\in L^1(G).$$

即 $M_a(G)\times M(G)\subset M_a(G)$.

$M_a(G)$是$M(G)$中的右理想. 总结以上讨论得以下定理.

定理12 $M_a(G)$是$M(G)$中的双边理想，且对于$\mu,\nu\in M(G)$和$f,m\in M_a(G)$，可以由下式定义$\mu*f$和$f*\nu$

$$(\mu*f)m=\mu*f,m,\ (f*\nu)m=f,m*\nu,$$

则 $$(\mu*f)(y)=\int f(x^{-1}y)\mathrm{d}\mu(x),\tag{1}$$

$$(f*\nu)y=\int f(yx^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}\nu(x),\tag{2}$$

对几乎所有的$y\in G$存在.

下面再研究$L^1(G)$. 以上指出$f\in L^1(G)\to f,m\in M(G)$是线性的，保持范数。也就是$L^1(G)$和$M_a(G)$完全一样，$L^1(G)$就是$M(G$中的一个理想. 如何在$L^1(G)$中引入乘法？由于$f\in L^1(G)$与$f,m\in M_a(G)$等同，自然要由$M_a(G)$中的乘法引出$L^1(G)$中的乘法. 即若$f,g\in L^1(G)$，则定义$f*g$如下

$$f,m*g,m=(f*g),m.$$

由(1)式知，对几乎所有的y有

$$(f*g)y=\int g(x^{-1}y)\mathrm{d}mf(x)=\int g(x^{-1}y)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x=\int f(yx)g(x^{-1})\mathrm{d}x,$$

这样定义了乘法后，$L^1(G)$是一个Banach代数，称为G上的群代数。

以上将$M_a(G)$中的乘法引入$L^1(G)$中，使$L^1(G)$成为一个群代数。$L^1(G)$和$M_a(G)$的代数结构完全一样，且按卷积引入乘法，使$(f*g)y$对几乎所有的y处处存在. 以卷积定义乘法运算，自然要考虑卷积的存在性，例如对任意两个可测函数f,g是否可以考虑它们的卷积。

若$f\in L^1(G)$，$g\in L^\infty(G)$. 则

$$\left|\int f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int|f(x)|\ |g(x^{-1}y)|\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_1\|g\|_\infty.$$

所以$f*g\in L^\infty(G)$且$\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_1\|g\|_\infty$. 即

$$L^1(G)*L^\infty(G)\subset L^\infty(G).$$

可以证明$f*g$还是左一致连续的.即任给$\varepsilon>0$,存在$U\in\mathscr{N}_e$,当$a\in U$时，对一切$x\in G$有

$$|(f*g)(ax)-(f*g)(x)|<\varepsilon,\ (\text{读者自证}).$$

又若$f,g\in C_c(G)$，$\mathrm{supp}f\subset K$，$\mathrm{supp}g\subset H$,则由以上讨论知$f*g$是连续的。又

$$(f*g)(y)=\int f(x)g(x^{-1}y)\mathrm{d}x,$$

若$x\notin K$则$f(x)=0$,若$x^{-1}y\notin H$，则$g(x^{-1}y)=0$.所以$\mathrm{supp}(f*g)\subset KH$. 且由于$K$，$H$是紧集，$KH$也是紧的. 即$f*g\in C_c(G)$.

若$\in L^p(G)$，$\in L^q(G)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，由于$L^p(G)$，$L^q(G)$中的函数可用$C_c(G)$中的函数来逼近，易证$f*g\in C_\infty(G)$.

下面再研究$M(G)$和$L^1(G)$的单元. 若$\delta\in M(G)$定义如下：

$$\delta(k)=k(e),\ k\in C_\infty(G).$$

则
$$(\mu*\delta)(k)=\iint k(xy)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\delta(y).$$

由δ的定义知$\int k(xy)\mathrm{d}\delta(y)=k(x)$，所以

$$(\mu*\delta)(k)=\int k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\mu(k).$$

同理可得 $(\delta*\mu)(k)=\mu(k)$. 即$\mu*\delta=\delta*\mu=\mu$. 所以$\delta$是$M(G)$的单元. $M(G)$是有单元的Banach代数.

但$\delta\notin M_a(G)$. 即不存在$f\in L^1(G)$使$\delta=f,m$. 只当G是离散时是例外的，此时$M_a(G)=M(G)$. 事实上，若G是离散的，则计数测度是G上的左不变测度μ，且由于离散拓扑下紧集合只能是有限的，故紧集合的测度是有限的，也就是计数测度为正则测度. 又$M(G)$中μ是有限的，故μ只能在可数个点$a_i(i=1,2,\cdots)$上不为零，且$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(a_i)$收敛，$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(a_i)<\infty$. 此时定义函数$f$满足

$$f(a_i)=\mu(a_i),$$

则f关于计数测度是可积的，于是

$$\mu=f,m,\quad f\in L^1(G).$$

所以$M(G)=M_a(G)$. 这时$M_a(G)$有单元

$$\delta=\begin{cases}0, & x\neq e\\ 1, & x=e\end{cases}$$

一般来讲$L^1(G)$也就是$M_a(G)$没有单元，但可以引入$L^1(G)$的近似单元. 为此先介绍网的概念.

定义10 设$(D,\leqslant)$是半序集合，且对任何a，$b\in D$，有$c\in D$使得$a\leqslant c$，$b\leqslant c$，则称$(D,\leqslant)$是一个有向集.

例如，设$V(x)$是拓扑空间(X,J)中x的邻域全体，$V_1(x),V_2(x)\in V(x)$，当$V_1\supset V_2$，规定$V_1\leqslant V_2$，则$(V(x),\leqslant)$是一个有向集.

定义11 设X是一个集合，$(D,\leqslant)$是有向集，S是D到X的映射，则$(S,D,\leqslant)$称为X中的一个网.

定义12 设$(S,D,\leqslant)$是拓扑空间(X,J)中的一个网，$x\in X$，若对x的任一邻域V，有$m\in D$，使当$n\geqslant m$时$S(n)\in V$，则称网$(S,D,\leqslant)$收敛于x。

引理5 $f\in L^1(G)$，任给$\varepsilon>0$，存在$V\in\mathscr{N}_e$使得若$u\in L^1(G)$，$u\geqslant 0$，$\int u\mathrm{d}m=1$，在V^c上$u=0$则

$$\|u*f-f\|_1\leqslant\varepsilon.$$

证 由于$y\to f_y$是$G\to L^1(G)$的连续映射，选取$V\in\mathscr{N}_e$使得$\|f_y-f\|_1\leqslant\varepsilon$对一切$y\in V$成立.

对任意满足引理条件的u，有

$$(u*f)(x)=\int u(y)f(y^{-1}x)\mathrm{d}y,$$

又
$$f(x)=\int u(y)f(x)\mathrm{d}y,\quad \left(\text{因}\int u(y)\mathrm{d}y=1\right)$$

于是
$$(u*f)(x)-f(x)=\int u(y)[f(y^{-1}x)-f(x)]\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\|u*f-f\|_1&=\int\left|\int u(y)[f(y^{-1}x)-f(x)]\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\iint u(y)\,|f(y^{-1}x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\leqslant\int u(y)\,\|f_y-f\|_1\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon\int u(y)\mathrm{d}y=\varepsilon.\end{aligned}$$ 证毕.

定义13 若对于一切$f\in L^1(G)$，可找到一个网$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$使得当$\alpha\to\infty$时，$\|u_\alpha*f-f\|_1\to 0$，则称$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$为$L^1(G)$的左近似

单元。若$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$使得当$\alpha\to\infty$时$\|f*u_\alpha-f\|_1\to 0$，则称$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$为右近似单元。若$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$既是左近似单元，又是右近似单元，则称$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$为双边近似的单元。若对于每个$\alpha\in A$，$\|u_\alpha\|\leqslant s$，则称近似单元$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$有界，$s$称为近似单元的界.

定理13 $L^1(G)$有左近似单元，且近似单元的界为1.

证 对e的每个紧邻域V，选取$u_V\in C_c^+(G)$. 使得$\int u_V dm=1$，且在V^c上$u_V=0$.

当$V_2\subset V_1$定义$V_1\leqslant V_2$，此时e的邻域的全体成为有向集合，$\{u_V\}$是一个网. 根据引理5，对任给的$\varepsilon>0$，存在V_0，当$V\geqslant V_0$时，成立着

$$\|u_V*f-f\|_1<\varepsilon,$$

即$L^1(G)$有左近似单元.

由$\int u_V dm=1$得$\|u_V\|=1$. 即近似单元的界为1. 证毕.

注 $L^1(G)$也有右近似单元. 事实上，若$f(x)\in L^1(G)$则$f'(x)=\Delta(x^{-1})f(x^{-1})\in L^1(G)$且$\|f'\|_1=\|f\|_1$，故$f\to f'$是连续映射. 因为$f'\in L^1(G)$，所以$u_V*f'\to f'$，从而$f''*u_V'\to f''$，但$f''=f$. 因此得$f*u_V'\to f$.

又$\mathrm{supp}f=K$，$\mathrm{supp}f'=K^{-1}$，若取V为对称邻域，则u_V，u_V'同时满足在V^c上为零. 所以$L^1(G)$有左、右似近单元.

定理14 若G是交换群，则$M(G)$也是可交换的.

证 设$x,y\in G$，则$xy=yx$. 又设$\mu,\nu\in M(G)$，有

$$(\mu*\nu)k=\iint k(xy)d\mu(x)d\nu(y)=\iint k(yx)d\nu(y)d\mu(x)$$
$$=(\nu*\mu)k,$$

即 $$\mu*\nu=\nu*\mu.$$ 定理得证.

定理15 若$M(G)$是可交换的，则G也是可交换的.

证 设$a\in G$，定义$\delta_a(k)=k(a)$，那么从测度的角度看

$$\delta_a(E)=\begin{cases}1, & 当a\in E,\\ 0, & 当a\notin E.\end{cases}$$

$\delta_e=\delta$，即为$M(G)$中的单元.

若$a,b\in G$，有

$$(\delta_a*\delta_b)k=\iint k(xy)\mathrm{d}\delta_a(x)\mathrm{d}\delta_b(y)=\int k(ay)\mathrm{d}\delta_b y=k(ab)$$
$$=\delta_{ab}(k).$$

同理 $(\delta_b*\delta_a)k=\delta_{ba}(k)$.

又因$M(G)$是可交换的，$\delta_a*\delta_b=\delta_b*\delta_a$. 所以

$$\delta_{ab}=\delta_{ba},$$

从而有$ab=ba$. 即G是可交换的. 定理得证.

由以上讨论知，若G是可交换群，则$M(G)$是可交换的，故$L^1(G)$也是可交换的. 反之，由$M(G)$是可交换的，导出G也是可交换的. 那么，若$L^1(G)$是可交换的，能否导出G也是可交换的？答案是肯定的. 下面证明这个事实.

定理16 对于每个$\mu\in M(G)$，定义映射T_μ：$L^1(G)\to L^1(G)$；

$$T_\mu: f\to\mu*f,$$

即$T_\mu f=\mu*f$，则$T_{\mu*\nu}=T_\mu T_\nu$且$\|T_\mu\|=\|\mu\|$.

证：容易验证T_μ是线性的.

$T_\mu(f+g)=\mu*(f+g)=\mu*f+\mu*g=T_\mu f+T_\mu g$,

$T_\mu(\alpha f)=\mu*(\alpha f)=\alpha(\mu*f)=\alpha T_\mu f$,

又 $T_{\mu*\nu}f=(\mu*\nu)*f=\mu*(\nu*f)=\mu*(T_\nu f)=T_\mu(T_\nu f)$.

所以 $$T_{\mu*\nu}=T_\mu T_\nu.$$

下面证明$\|T_\mu\|=\|\mu\|$. 由于

$$\|T_\mu f\|_1=\|\mu*f\|_1\leqslant\|\mu\|\ \|f\|_1,$$

所以 $$\|T_\mu\|\leqslant\|\mu\|.$$

另一方面，对一切$f\in L^1(G)$且$\|f\|_1=1$. 有

$$\|T_\mu\|\geqslant\|T_\mu f\|. \tag{3}$$

又由$\|\mu\|=\sup\{|\mu(k)|\,|\,\|k\|_\infty\leqslant1\}$知，任给$\varepsilon>0$，存在$k\in C_c(G)$，$\|k\|_\infty\leqslant1$，使得

$$|\mu(k)|\geqslant\|\mu\|-\varepsilon. \tag{4}$$

$k\in C_0(G)$是一致连续的，对于$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\|\mu\|}$，可找到单元$e$的邻域$U$，$U$依赖于$\varepsilon'$，$k$，记作$U(\varepsilon',k)$，使得

$$|k(xy)-k(x)|<\varepsilon'$$

对一切$y\in U(\varepsilon',k)\in\mathcal{N}_e$成立。

$T_\mu f\in L^1(G)$可以看作是$M_a(G)$中的元，且

$$(T_\mu f)(k)=(\mu*f)(k)=\iint k(xy)f(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y.$$

今取f满足$f\geqslant 0$，在$U(\varepsilon',k)^c$上$f=0$且$\|f\|_1=\int f(y)\mathrm{d}y=1$.

则
$$\mu(k)=\int k(x)\mathrm{d}\mu(x)=\iint k(x)f(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y.$$

于是
$$|(\mu*f-\mu)(k)|=|\iint[k(xy)-k(x)]f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(x)|$$
$$\leqslant\iint|k(xy)-k(x)|f(y)dy\mathrm{d}|\mu|(x)<\varepsilon'\|\mu\|=\varepsilon.$$

所以
$$|(\mu*f)k|\geqslant|\mu(k)|-\varepsilon. \tag{5}$$

由(3)、(4)、(5)式得

$$\|T_\mu\|\geqslant\|T_\mu f\|\geqslant|(\mu*f)k|\geqslant|\mu(k)|-\varepsilon\geqslant\|\mu\|-2\varepsilon.$$

由ε的任意性得　$\|T_\mu\|\geqslant\|\mu\|$.　定理得证.

定理17　若$L^1(G)$是交换群，则G是交换群.

证　首先证明

$$\delta_{ab}*f*g=\delta_{ba}*f*g$$

对一切$a,b\in G$，及一切$f,g\in L^1(G)$是成立的，其中δ_{ab}的定义如同定理15.

容易验证　$(f*g)_a=f_a*g$. 于是

$$\delta_{ab}*f*g=(\delta_b)_a*f*g=(\delta_b*f)_a*g=(f*\delta_b)_a*g$$
$$=f_a*\delta_b*g=f_a*(\delta*g)_b=f_a*g_b,$$
$$\delta_{ba}*f*g=(\delta_a)_b*f*g=(\delta_a)_b*g*f=(\delta_a*g)_b*f$$
$$=(g*\delta_a)_b*f=g_b*\delta_a*f=g_b*f_a.$$

所以，　　$\delta_{ab}*f*g=\delta_{ba}*f*g$.

令$\mu=\delta_{ab}-\delta_{ba}$，得$\mu*f*g=0$对一切$f,g\in L^1(G)$是成立的。又由于$L^1(G)$有近似单元，取$f$为$L^1(G)$的近似单元，由乘法的连续性得

$$\mu*g=0,\qquad \forall g\in L^1(G).$$

即对一切$g\in L^1(G)$，$T_\mu g=0$。所以$T_\mu=0$。故$\|T_\mu\|=\|\mu\|=0$。从而$\mu=0$，也就是$\delta_{ab}=\delta_{ba}$。所以$ab=ba$，即G为交换群。定理得证。

第七章　交换群上的调和分析初步

n维空间中对平移不变的正则测度必是Lebesgue测度乘以常数因子。调和分析就是建立在Lebesgue测度的平移不变性上，第六章已证明了局部紧拓扑群上Haar测度的存在性，在此基础上我们将调和分析推广到局部紧的交换群G上。首先给出特征标群概念，引出G上Fourier变换概念并给出反演公式。着重研究拓扑群G及其特征标群的关系，给出了Pontryagin对偶定理，同时还讨论商群与子群的特征标群，最后给出了局部紧群的结构定理。

§7.1　对偶群

由前一章知，若G是局部紧交换群，具有Haar测度m，则$L^1(G, m)$是一个可交换的Banach代数，具有近似单元，现在研究$L^1(G, m)$上的Gelfand理论。

令$\Delta(L^1(G, m))=\Delta$表示$L^1(G, m)$的极大理想空间或结构空间，则Δ是一个局部紧的Hausdorff空间，若$\varphi\in\Delta$，则对一切$f, g\in L^1(G, m)$，$x\in G$有

$$\begin{aligned}\varphi(f_x)\varphi(g)&=\varphi(f_x*g)=\varphi((f*g)_x)=\varphi((g*f)_x)\\&=\varphi(g_x*f)=\varphi(g_x)\varphi(f).\end{aligned}$$

因为$\varphi\neq0$，总可以找到g使$\varphi(g)\neq0$．记$\overline{\gamma(x)}=\dfrac{\varphi(g_x)}{\varphi(g)}$，

则上式可写成

$$\varphi(f_x)=\overline{\gamma(x)}\,\varphi(f). \tag{1}$$

这表明，对于一切$f\in L^1(G, m)$，存在γ：$G\to\boldsymbol{C}$，使得(1)式成立。下面讨论$\gamma(x)$的性质。

(1) $\gamma(x)$是连续的.

显然，$x\to f_x$是连续的，φ是代数同态也是连续的，所以$\gamma(x)$是连续的.

(2) $\gamma(xy)=\gamma(x)\gamma(y)$.

因为$\varphi(f_{xy})=\overline{\gamma(xy)}\varphi(f)=\varphi((f_y)_x)=\overline{\gamma(x)}\varphi(f_y)$

$$=\overline{\gamma(x)}\ \overline{\gamma(y)}\varphi(f).$$

所以 $$\gamma(xy)=\gamma(x)\gamma(y).$$

(3) $|\gamma(x)|=1$.

因为 $|\gamma(x)\|\varphi(f)|=|\varphi(f_x)|\leqslant\|\varphi\|\ \|f_x\|_1\leqslant\|f\|_1$,

$$(\|\varphi\|\leqslant 1).$$

所以$\gamma(x)$是有界的。又$\gamma(x^n)=\gamma(x)^n$，因此$|\gamma(x)|\leqslant 1$. 又$\gamma(e)=1$，$\gamma(x^{-1})=\gamma(x)^{-1}$. 所以$|\gamma(x)|=1$.

归纳以上性质知，γ是$G\to T$的一个代数同态，且为连续的.

引理1 对一切$\varphi\in L^1(G)^*$，有

$$\varphi(f*g)=\int f(y)\varphi(g_y)\mathrm{d}y,\quad (f,g\in L^1(G)).$$

证 f，$g\in L^1(G)$，可取G的一个σ-紧子群G_0，在G_0外，$f=g=0$，于是$f*g=0$，$L^1(G_0)^*=L^\infty(G_0)$. 因此给定$f\in L^1(G)$，存在G上一个有界Borel函数j，使得

$$\varphi(f*g)=\int(f*g(x))j(x)dx,$$

且 $$\varphi(g_x)=\int g_x(y)j(y)dy.$$

利用Fubini定理得

$$\varphi(f*g)=\iint f(y)g(y^{-1}x)j(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int f(y)\left(\int g_y(x)j(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int f(y)\varphi(g_y)\mathrm{d}y.$$

引理得证.

φ是代数同态，利用(1)式及引理1得

$$\varphi(f)\varphi(g)=\varphi(f*g)=\int f(y)\varphi(g_y)\mathrm{d}y=\int f(y)\overline{\gamma(y)}\varphi(g)\mathrm{d}x,$$

即
$$\varphi(f)=\int f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

总结以上讨论知，对于任意的$\varphi\in\varDelta$，存在$G\to\boldsymbol{T}$的连续代数同态γ，使得(2)式成立．反之，对于每一个$G\to\boldsymbol{T}$的连续代数同态γ，由(2)式定义了一个φ：$L^1(G)\to\boldsymbol{T}$．容易验证$\varphi\in\varDelta$．事实上对于$g\in L^1(G)$，$y\in G$，有

$$\varphi(g_y)=\int g_y(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x=\int g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int g(x)\overline{\gamma(yx)}\mathrm{d}x\quad=\overline{\gamma(y)}\int g(x)\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\overline{\gamma(y)}\,\varphi(g).$$

$$\varphi(f*g)=\int(f*g)(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\iint f(y)g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\int f(y)\left(\int g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}dx\right)\mathrm{d}y=\int f(y)\varphi(g_y)\mathrm{d}y$$

$$=\int f(y)\overline{\gamma(y)}\,\varphi(g)\mathrm{d}y=\varphi(f)\varphi(g).$$

即φ是$L^1(G)\to\boldsymbol{C}$的一个非零代数同态．

称γ为G的特征标，所有连续特征标的集合记作$\widehat{G}$或Γ．于是(2)式建立了$\varDelta$和Γ之间的1-1对应．再将$\varDelta$上的Gelfand拓扑引到Γ上，即一个集合在Γ中是开的当且仅当它在$\varDelta$中所对应的集合是开的．这样，Γ就成为一个局部紧的Hausdorff空间，又Gelfand变换$\hat{f}$定义在$\varDelta$上，$\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$．自然也可看作$\hat{f}$是定义在$\Gamma$上，

记作$\hat{f}(\gamma)=\varphi(f)$，于是(2)式写成

$$\hat{f}(\gamma)=\int f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x.$$

此时，$\hat{f}$就叫做f的Fourier变换.

在Γ上再定义乘法

$$(\gamma_1\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)\gamma_2(x),$$

则Γ成为一个交换群.下面将证明Γ上群的结构和拓扑结构是相容的，即Γ成为一个拓扑群，称为特征标群.

定理1 若G是离散的，则Γ是紧的.

证 若G是离散的，则$M_a(G)=M(G)$，故$L^1(G)$有单元χ_e，由第三章知其极大理想空间Δ是紧的，所以Γ是紧的. 证毕.

定理2 若G是紧的，则Γ是离散的.

证 $\gamma(x)$是G上的连续函数，G是紧集合，故$\gamma(x)$可积，即$\gamma(x)\in L^1(G)$又$\hat{\gamma}$: $\Gamma\to \boldsymbol{C}$是Γ上的连续函数且在∞处为零，即$\hat{\gamma}\in C_\infty(\Gamma)$.

又$\hat{\gamma}(\beta)=\int\gamma(x)\overline{\beta(x)}\,\mathrm{d}x$，其中$\beta(x)\in\Gamma$，由$|\beta(x)|=1$,知$\overline{\beta(x)}=\beta(x)^{-1}$，所以有

$$\hat{\gamma}(\beta)=\int\gamma(x)\beta^{-1}(x)\mathrm{d}x=\int\gamma\beta^{-1}(x)\mathrm{d}x.$$

另外，对一切$a\in G$有

$$\int\gamma(x)\mathrm{d}x=\int\gamma(ax)\mathrm{d}x=\gamma(a)\int\gamma(x)\mathrm{d}x.$$

总可以找到a使$\gamma(a)\neq 1$，除非$\gamma=e$. 由此知

$$\int\gamma(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 当\gamma\neq e;\\ mG, & 当\gamma=e.\end{cases}$$

所以
$$\hat{\gamma}(\beta)=\int\gamma\beta^{-1}(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 当\beta\neq\gamma;\\ mG, & 当\beta=\gamma.\end{cases}$$

这表明$\hat{\gamma}=mG\chi_{(\gamma)}$，又$\hat{\gamma}\in C_\infty(\Gamma)$，所以$\chi_{(\gamma)}$是连续函数，因此单点集合必是开的，故$\Gamma$是离散的。证毕。

引入记号$A(\Gamma)=\{\hat{f}\,|f\in L^1(G)\}$，即$A(\Gamma)=\widehat{L^1}(G)$．由于$\hat{f}\in C_\infty(\Gamma)$，故知$A(\Gamma)\subset C_\infty(\Gamma)$。有以下定理。

定理 3 $A(\Gamma)$是$C_\infty(\Gamma)$的稠密子代数。

证 由Gelfand变换的定义知，$A(\Gamma)$是$C_\infty(\Gamma)$的子代数，$A(\Gamma)$分离Γ中的点，而且$A(\Gamma)$不在Γ的任何点消失为零.

现在再证明$A(\Gamma)$是对称的，即若$\hat{f}\in A(\Gamma)$则$\overline{\hat{f}}\in A(\Gamma)$．事实上，$f\in L^1(G)$，则$f'(x)=f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\in L^1(G)$，又$G$是可交换的，$\Delta(x)=1$．所以$f(x^{-1})=f'(x)\in L^1(G)$．又$\tilde{f}(x)=\overline{f'(x)}=\overline{f(x^{-1})}$，故$\tilde{f}(x)\in L^1(G)$．

$$\hat{\tilde{f}}(\gamma)=\int\tilde{f}(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x=\int\overline{f(x^{-1})}\ \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\overline{\int f(x^{-1})\gamma(x)\mathrm{d}x}=\overline{\int f(x)\gamma(x^{-1})\,\mathrm{d}x}$$

$$=\overline{\int f(x)\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}x}=\overline{\hat{f}(\gamma)}.$$

所以$\overline{\hat{f}}\in A(\Gamma)$，即$A(\Gamma)$是对称的。

由$A(\Gamma)$具有以上性质，利用Stone-Weierstrass定理知$A(\Gamma)$在$C_\infty(\Gamma)$中稠密。定理得证．

定理 4 (1)若$\hat{f}(\beta)\in A(\Gamma)$，$x\in G$，则$\overline{\beta(x)}\hat{f}(\beta)\in A(\Gamma)$.

(2)若$\hat{f}\in A(\Gamma)$，$\gamma\in\Gamma$，则$\hat{f}_\gamma\in A(\Gamma)$.

证 (1)若$f\in L^1(G)$，$x\in G$，则$f_x\in L^1(G)$，$\hat{f}_x(\beta)\in A(\Gamma)$.

而 $$\hat{f}_x(\beta)=\int f_x(y)\overline{\beta(y)}\,\mathrm{d}y=\int f(x^{-1}y)\overline{\beta(y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int f(y)\overline{\beta(xy)}\,\mathrm{d}y=\int f(y)\overline{\beta(x)}\ \overline{\beta(y)}\,\mathrm{d}y$$

$$=\overline{\beta(x)}\hat{f}(\beta).$$ (1)得证.

(2)若$\hat{f}\in A(\Gamma)$，$\gamma\in\Gamma$。由于Γ是群，因此可考虑$\hat{f}_\gamma$，

$$\hat{f}_{\gamma}(\beta)=\hat{f}(\gamma^{-1}\beta)=\int f(x)\overline{\gamma^{-1}\beta(x)}\,dx$$

$$=\int f(x)\overline{\gamma^{-1}(x)}\,\overline{\beta(x)}\,dx=\int f(x)\gamma(x)\overline{\beta(x)}\,dx$$

$$=\int f\gamma(x)\overline{\beta(x)}\,dx=(f\gamma)^{\wedge}(\beta).$$

又$f\in L^1(G)$，$\gamma\in\Gamma$是连续函数，故$f\gamma\in L^1(G)$，所以$(f\gamma)^{\wedge}\in A(\Gamma)$。

引理 2 $(x,\gamma)\to\gamma(x)$是$G\times\Gamma\to C$的连续映射。

证 首先证明若$f\in L^1(G)$，则$\hat{f}_x(\gamma)$是(x,γ)的连续函数。事实上

$$|\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)|\leqslant|\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma)|+|\hat{f}_{x_0}(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)|.$$

由于

$$\|\hat{f}\|_{\infty}\leqslant\|f\|_1,$$

所以 $|\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma)|\leqslant\|\hat{f}_x-\hat{f}_{x_0}\|_{\infty}\leqslant\|f_x-f_{x_0}\|_1$.

$f\in L^1(G)$，则$x\to f_x$连续，故任给$\varepsilon>0$，存在$U\in\mathscr{N}_e$，当$x\in x_0U$有$\|f_x-f_{x_0}\|_1<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

又$\hat{f}_{x_0}(\gamma)$是γ的连续函数，对于给定的$\varepsilon>0$，存在$V\in\mathscr{N}_e$，($e\in\Gamma$)，当$\gamma\in\gamma_0V$有$|\hat{f}_{x_0}(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。故当$x\in x_0U$，$\gamma\in\gamma_0V$时有

$$|\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)|<\varepsilon.$$

由此知，当$f\in L^1(G)$则$(x,\gamma)\to\hat{f}_x(\gamma)$是$G\times\Gamma\to C$的连续映射。

又 $$\hat{f}_x(\gamma)=\overline{\gamma(x)}\,\hat{f}(\gamma).$$

取定$(x_0, \gamma_0)\in G\times\Gamma$，取$f\in L^1(G)$使得$\hat{f}(\gamma_0)\neq 0$．由$\hat{f}(\gamma)$的连续性知，存在$V\in\mathcal{N}_e$，当$\gamma\in\gamma_0V$时，$\hat{f}(\gamma)\neq 0$．所以

$$\overline{\gamma(x)}=\frac{\hat{f}_x(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)}.$$

又$\hat{f}_x(\gamma)$是(x, γ)的连续函数，故$\overline{\gamma(x)}$是(x, γ)的连续函数．所以$(x, \gamma)\to\gamma(x)$是$G\times\Gamma\to\boldsymbol{C}$的连续映射.

定理5 K是G中的紧集合，$\rho>0$，令

$$N(K, \rho)=\{\gamma\in\Gamma \mid |\gamma(x)-1|<\rho, \ \forall x\in K\},$$

则$\beta N(K, \rho)(\beta\in\Gamma)$组成$\Gamma$拓扑的基.

证 首先注意下列事实：若X，Y是拓扑空间，$U\subset X\times Y$是开的，则对每一个紧集$K\subset X$，集合$\{y\in Y \mid K\times\{y\}\subset U\}$是开的.（证明与§6.1拓扑群的性质8类似）

由这个事实和引理2知$N(K, \rho)$是开的．又$e\in N(K, \rho)$，故$N(K, \rho)$是e的一个开邻域.

下面证明，任给$e\in\Gamma$的一个开邻域W.可以找到某个$N(K, \rho)$，使$W\supset N(k, \rho)$．$W\subset\Gamma$为开集，Γ中的拓扑是使$\hat{f}$连续的最弱的拓扑，故存在$n\in N$，f_1，f_2，…，$f_n\in L^1(G)$，$\delta>0$使得

$$A=\{\gamma \mid |\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(e)|<3\delta\}\subset W.$$

$C_c(G)$在$L^1(G)$中稠密，故存在g_1，g_2，…，$g_n\in C_c(G)$，使得

$$\|g_i-f_i\|_1<\delta, \qquad i=1,2, \cdots, n.$$

取$K=\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{supp}\, g_i$，令$\rho>0$使得$\rho\cdot\max\|g_i\|_\infty\cdot mK<\delta$.作集合

$$B=\{\gamma \mid |\hat{g}_i(\gamma)-\hat{g}_i(e)|<\delta, \ i=1, 2, \cdots, n\}.$$

又 $$|\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(e)|\leqslant|\hat{f}_i(\gamma)-\hat{g}_i(\gamma)|+|\hat{g}_i(\gamma)-\hat{g}_i(e)|+|\hat{g}_i(e)-\hat{f}_i(e)|<3\delta$$

所以$B\subset A\subset W$。

又若$\gamma\in N(K,\ \rho)$则

$$|\hat{g}_i(\gamma)-\hat{g}_i(e)|=\left|\int g_i(x)\overline{\gamma(x)}\,dx-\int g_i(x)\,dx\right|$$

$$\leqslant\int|g_i(x)|\ |\overline{\gamma(x)}-1|\,dx=\int|g_i(x)|\ |\gamma(x)-1|\,dx,$$

当$x\notin K$，则$g_i(x)=0, i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，当$x\in K$则$|\gamma(x)-1|<\rho$，所以

$$|\hat{g}_i(\gamma)-\hat{g}_i(e)|\leqslant\|g_i\|_\infty\rho\cdot mK<\delta.$$

因此$\gamma\in B$，于是有$N(K,\ \rho)\subset B\subset W$。

由此知$N(K,\ \rho)$组成Γ中e的邻域的基。

最后再证明对于每一个$\beta\in\Gamma$，映射$\gamma\to\beta\gamma$是$\Gamma\to\Gamma$的一个同胚映射。

只需证明$\gamma\to\beta\gamma$是连续的，则由$\gamma\to\beta^{-1}\gamma$的连续性即得逆映射也是连续的。令$\gamma_\lambda$是一个网，且$\gamma_\lambda\to\gamma$。现证$\beta\gamma_\lambda\to\beta\gamma$。

$\gamma_\lambda\to\gamma$是Gelfand拓扑下的弱收敛，因此$\gamma_\lambda\to\gamma$当且仅当$\hat{f}(\gamma_\lambda)\to\hat{f}(\gamma)$。又$\hat{f}(\beta\gamma)=(f\overline{\beta})\hat{\ }(\gamma)$，所以

$$\hat{f}(\gamma_\lambda)\to\hat{f}(\gamma),\ \forall f\in L^1(G)\Longleftrightarrow(f\overline{\beta})\hat{\ }(\gamma_\lambda)\to(f\overline{\beta})\hat{\ }(\gamma),$$

$$\forall f\in L^1(G)\ \Longleftrightarrow\hat{f}(\beta\gamma_\lambda)\to\hat{f}(\beta\gamma),\ \forall f\in L^1(G)\Longleftrightarrow$$

$$\beta\gamma_\lambda\to\beta\gamma.$$

因此$\gamma\to\beta\gamma$是$\Gamma\to\Gamma$的同胚映射，故$\beta N(K,\ \rho)$组成β邻域的基。定理得证。

$\beta N(k,\ \rho)$组成Γ中拓扑的基，这样的拓扑叫做紧开拓扑，它将紧集合$K\subset G$中的点送到群Γ的开集合$\{z\mid|z-1|<\rho\}$中，即特征标群Γ上的拓扑是紧开拓扑。由以上证明知，Γ上的Gelfand拓扑和紧开拓扑完全一样。

同理可以证明集合$\{x\in G|\ |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C, C$是$\Gamma$中的

紧集合}是G中的开集合，且显然该集合包含e。在§7.4中将证明这个事实。

定理6 Γ是一个局部紧的交换群。

证 只需证明映射$(\gamma, \beta)\to\gamma^{-1}\beta$是连续的。即证明若开集$W\ni\gamma^{-1}\beta$，则存在开集$U\ni\gamma$，开集$V\ni\beta$，使得$U^{-1}V\subset W$。

因为$\gamma^{-1}\beta\in W$，故存在K，ρ使得$\gamma^{-1}\beta N(K, \rho)\subset W$，令$U=\gamma N(K,\frac{\rho}{2})$，$V=\beta N(K,\frac{\rho}{2})$，若$s\in U$，$t\in V$，则

$$s=\gamma\zeta,\quad \zeta\in\Gamma,\text{ 且对一切 } x\in K\text{ 有 } |\zeta(x)-1|<\frac{\rho}{2};$$

$$t=\beta\eta,\quad \eta\in\Gamma,\text{ 且对一切 } x\in K\text{ 有 } |\eta(x)-1|<\frac{\rho}{2}.$$

又$s^{-1}t=\zeta^{-1}\gamma^{-1}\beta\eta=\gamma^{-1}\beta\zeta^{-1}\eta$，其中$\zeta^{-1}\eta\in\Gamma$，且对一切$x\in K$有

$$|\xi^{-1}\eta(x)-1|=|\xi^{-1}(x)\eta(x)-1|=|\xi^{-1}(x)|\,|\eta(x)-\xi(x)|$$

$$\leqslant|\eta(x)-1|+|\xi(x)-1|<\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}=\rho,\quad(\because |\xi^{-1}(x)|=1)$$

所以$s^{-1}t\in\gamma^{-1}\beta N(K, \rho)\subset W$。即$U^{-1}V\subset W$，所以$(\gamma, \beta)\to\gamma^{-1}\beta$是连续的。$\Gamma$为拓扑群。定理得证。

定义1 拓扑群Γ称为G的对偶群或共轭群（*Dual Group*），记作$\Gamma=\widehat{G}$。

对于$G=\boldsymbol{R}$，$G=\boldsymbol{T}$，$G=\boldsymbol{Z}$的情形已经在第三章中讨论过。综合以上讨论知，对于局部紧交换群G，得到它的对偶群$\widehat{G}$仍为一个局部紧的交换群。自然可以再考虑$\widehat{G}$的对偶群$\widehat{\widehat{G}}=\widehat{\Gamma}$，即

$$G\to\widehat{G}=\Gamma\to\widehat{\Gamma}.$$

为研究$\widehat{\Gamma}$和G的关系，定义$G\to\widehat{\Gamma}$的映射α：$x\to\alpha(x)$，如下：

$$\alpha(x)\gamma=\gamma(x),$$

则
$$\alpha(xy)\gamma=\gamma(xy)=\gamma(x)\gamma(y),$$

$$(\alpha(x)\alpha(y))\gamma=\alpha(x)\gamma\cdot\alpha(y)\gamma=\gamma(x)\gamma(y),$$

所以
$$\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y).$$

再证 α 是连续的．即若$\{x_\lambda\}$是一个网，$x_\lambda\to x$，证明$\alpha(x_\lambda)\to\alpha(x)$．

由于$\gamma(x)$是x的连续函数，当$x_\lambda\to x$有$\gamma(x_\lambda)\to\gamma(x)$．由$\alpha(x)$的定义得

$$\alpha(x_\lambda)\gamma\to\alpha(x)\gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma.$$

又由引理 2 知$(\gamma,\alpha(x))\to\alpha(x)\gamma$是$\Gamma\times\widehat{\Gamma}\to\boldsymbol{C}$的连续映射、所以$\alpha(x_\lambda)\to\alpha(x)$．

由以上讨论知 α 是$G\to\widehat{\Gamma}$的连续的代数同态．在§7.4中还将作进一步的讨论．

§7.2 Bochner定理

定义 2 G是局部紧交换群，具有Haar测度，$M(G)$是相应的测度代数，具有单元δ．对于$\mu\in M(G)$，定义$\widehat{\mu}$：$\Gamma\to\boldsymbol{C}$如下：

$$\widehat{\mu}(\gamma)=\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x),\ \gamma\in\Gamma.$$

$\widehat{\mu}$叫做μ的Fourier-Stieltjes变换．

注 (1)由γ的定义知，$\widehat{\mu}$定义在$L^1(G)$的极大理想空间Γ上，而不是定义在$M(G)$的极大理想空间上，$M(G)$太大，我们没有考虑它的极大理想空间，仅仅考虑了$M(G)$的子代数$M_c(G)$，故$\widehat{\mu}$不是μ的Gelfand变换．

(2)若 $\mu=f,m$，则$\widehat{\mu}=(\widehat{f},m)=\int f(x)\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}x=\widehat{f}$．

记$B(\Gamma)=\{\widehat{\mu}\mid\mu\in M(G)\}$．本节研究$B(\Gamma)$这个空间的构造．显然$B(\Gamma)\supset A(\Gamma)$，且

$$\widehat{\delta}(\gamma)=\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\delta(x)=\overline{\gamma(e)}=1.$$

用$C_u(\Gamma)$表示$\Gamma\to\boldsymbol{C}$的所有一致连续的有界函数作成的Banach代数．

定理 7 Fourier-Stieltjes变换是$M(G)$到$C_0(\Gamma)$内的范数减小的代数同态。

证 显然$(\mu+\nu)^{\wedge}=\hat{\mu}+\hat{\nu}$，$(\alpha\mu)^{\wedge}=\alpha\hat{\mu}$。

$$(\mu,\ \nu\in M(G)).$$

现在证明 $(\mu*\nu)^{\wedge}=\hat{\mu}\cdot\hat{\nu}$.

事实上，$(\mu*\nu)^{\wedge}(\gamma)=\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu*\nu(x)$

$$=\iint\overline{\gamma(xy)}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)$$

$$=\iint\overline{\gamma(x)}\ \overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y)=\hat{\mu}(\gamma)\hat{\nu}(\gamma).$$

故$\hat{\mu}$是一个代数同态. 又

$$\|\hat{\mu}\|_{\infty}=\sup\{|\hat{\mu}(\gamma)|\ \gamma\in\Gamma\},\qquad (|\gamma|=1)$$

而 $$|\hat{\mu}(\gamma)|\leqslant\int|\overline{\gamma}|\,\mathrm{d}|\mu|=|\mu|(\Gamma)=\|\mu\|,$$

所以 $$\|\hat{\mu}\|_{\infty}\leqslant\|\mu\|.$$

现在证明$\hat{\mu}\in C_0(\Gamma)$，即$\hat{\mu}$一致连续。即证明，任给$\varepsilon>0$，存在$U\in\mathscr{N}_e$，当$\beta^{-1}\gamma\in U$有

$$|\hat{\mu}(\gamma)-\hat{\mu}(\beta)|<\varepsilon.$$

今取$U=N(K,\rho)$，其中$\rho=\rho(\varepsilon)$，由于μ是正则的，可设$\mu\geqslant 0$，则存在紧集合$K\subset G$，使得

$$\mu(G\setminus K)<\rho.$$

当$\beta^{-1}\gamma\in N(K,\rho)$有

$$|\hat{\mu}(\gamma)-\hat{u}(\beta)|=|\int(\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)})\mathrm{d}\mu(x)|$$

$$\leqslant\int|\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\int_K |\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|\,\mathrm{d}\mu(x)+\int_{G\setminus K}|\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

$$\int_{G\setminus K}|\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|\,\mathrm{d}\mu(x)\leqslant\int_{G\setminus K}(|\overline{\gamma(x)}|$$

$$+|\overline{\beta(x)}|)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant 2\mu(G\setminus K)<2\rho.$$

当$x\in K$有

$$|\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|=|\gamma(x)-\beta(x)|=|\beta(x)|\ |\beta^{-1}\gamma(x)-1|.$$

又 $|\beta(x)|=1$，$\beta^{-1}\gamma\in N(K,\rho)$，故 $|\beta^{-1}\gamma(x)-1|<\rho$，所以

$$\int_K|\overline{\gamma(x)}-\overline{\beta(x)}|\,\mathrm{d}\mu(x)<\rho\mu(K)\leqslant\rho\mu(G)=\rho\,\|\mu\|.$$

所以 $$|\hat{\mu}(\gamma)-\hat{\mu}(\beta)|<2\rho+\rho\,\|\mu\|.$$

取 $\rho<\dfrac{\varepsilon}{2+\|\mu\|}$，则 $|\hat{\mu}(\gamma)-\hat{\mu}(\beta)|<\varepsilon$.

因此$\hat{\mu}\in C_u(\Gamma)$. 故$\mu\rightarrow\hat{\mu}$是$M(G)\rightarrow C_u(\Gamma)$的代数同态，且范数是减少的。

该定理指出$B(\Gamma)\subset C_u(\Gamma)$，$B(\Gamma)$是$C_u(\Gamma)$的子代数。

引理 3 (1)若$\hat{\mu}(\gamma)\in B(\Gamma)$，则对于任意的$x\in G$,

$$\overline{\gamma(x)}\hat{\mu}(\gamma)\in B(\Gamma).$$

(2)若$\hat{\mu}(\gamma)\in B(\Gamma)$，则$\overline{\hat{\mu}}(\gamma)\in B(\Gamma)$且对每一个$\gamma\in\Gamma$, $\hat{\mu}_\gamma\in B(\Gamma)$.

证 (1)$\mu\in M(G)$，考虑$\mu_x\in M(G)$，$\mu_x=\delta_x*\mu$，所以$\hat{\mu}_x(\gamma)=\hat{\delta}_x(\gamma)\hat{\mu}(\gamma)$. 又

$$\hat{\delta}_x(\gamma)=\int\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}\delta_x(y)=\overline{\gamma(x)},$$

故$\hat{\mu}_x(\gamma)=\overline{\gamma(x)}\ \hat{\mu}(\gamma)\in B(\Gamma)$.

(2) $\widehat{\mu_\gamma}(\beta)=\hat{\mu}(\gamma^{-1}\beta)=\int\overline{\gamma^{-1}\beta(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$

$$=\int\overline{\gamma^{-1}(x)}\ \ \overline{\beta(x)}\ \mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\int\gamma(x)\overline{\beta(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)=(\gamma\mu)\widehat{\ }(\beta)\in B(\Gamma).$$

又 $\tilde{\mu}(E)=\overline{\mu'(E)}=\overline{\mu(E^{-1})}$，所以

$$\hat{\tilde{\mu}}=\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\tilde{\mu}(x)=\int\overline{\gamma(x^{-1})}\ \ \overline{\mathrm{d}\mu(x)}$$

$$=\int\overline{\gamma(x)^{-1}\mathrm{d}\mu(x)}=\overline{\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)}$$

$$=\overline{\hat{\mu}}\in B(\Gamma).$$

引理得证。

上一节定义了$G\to\hat{\Gamma}$的映射α: $\alpha(x)\gamma=\gamma(x)$，给定$\mu\in M(\Gamma)$，则$\hat{\mu}$定义在$\hat{\Gamma}$上，考虑$\hat{\mu}\circ\alpha$记作$\check{\mu}=\hat{\mu}\circ\alpha$，则

$$\check{\mu}(x)=\hat{\mu}(\alpha(x))=\int\overline{\alpha(x)(\gamma)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)=\int\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma).$$

引理 4 若$\mu\in M(G)$，$\nu\in M(\Gamma)$，则$\int\hat{\mu}\,\mathrm{d}\nu=\int\check{\nu}\,\mathrm{d}\mu$.

证 $\int\hat{\mu}\,\mathrm{d}\nu=\int\hat{\mu}(\gamma)\mathrm{d}\nu(\gamma)=\iint\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(\gamma)$

$$=\iint\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\nu(\gamma)\mathrm{d}\mu(x)=\int\check{\nu}\,d\mu.$$

定理 8 （唯一性定理） 若$\mu\in M(\Gamma)$，$\check{\mu}=0$，则$\mu=0$.

证 若$\check{\mu}=0$，则对一切$f\in L^1(G)$有

$$0=\int\check{\mu}f\mathrm{d}m=\int\hat{f}\,\mathrm{d}\mu.$$

又$A(\Gamma)$是$C_\infty(\Gamma)$的稠密子代数，故$\mu=0$。定理得证。

定义 3 设G是一个群，φ是G上一个复值函数，若对一切$x_1,x_2,\cdots,x_P\in G$，$C_1,C_2,\cdots,C_P\in \boldsymbol{C}$有

$$\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\varphi(x_n x_m^{-1})\geqslant 0, \qquad \forall P\in N.$$

则称φ为正定函数。

例 1 若$\gamma\in\Gamma$，则γ是正定连续的。

证 $\gamma(x_n x_m^{-1})=\gamma(x_n)\gamma(x_m^{-1})=\gamma(x_n)\overline{\gamma(x_m)}$,

$$\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\gamma(x_n x_m^{-1})=\sum_{n=1}^{P} C_n\gamma(x_n)\sum_{n,m=1}^{P}\cdot\overline{C_m\gamma(x_m)}$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{P} C_n\gamma(x_n)\right|^2\geqslant 0.$$

例 2 $\mu\in M(G)$，$\mu\geqslant 0$，则$\widehat{\mu}$在Γ上是正定连续的。

证 $$\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\,\widehat{\mu}(\gamma_n\gamma_m^{-1})=\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\int\overline{(\gamma_n\gamma_m^{-1})(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\int\overline{\gamma_n(x)}\,\gamma_m(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\int\left|\sum_{n=1}^{P} C_n\overline{\gamma_n(x)}\right|^2\mathrm{d}\mu(x)\geqslant 0.$$

同理，若$\mu\in M(\Gamma)$，$\mu\geqslant 0$，则$\check{\mu}$在G上是正定连续函数。

例 3 若$k\in C_c(G)$，则$k*\widetilde{k}$是正定连续函数。

证 $$k*\widetilde{k}(x_n x_m^{-1})=\int k(y)\,\widetilde{k}(y^{-1}x_n x_m^{-1})\mathrm{d}y$$

$$=\int k(y)\overline{k(x_m x_n^{-1}y)}\,\mathrm{d}y=\int k(x_n y)\,\overline{k(x_m y)}\,\mathrm{d}y$$

$$\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}k*\widetilde{k}(x_n x_m^{-1})=\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\int k(x_n y)\,\overline{k(x_m y)}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int\left|\sum_{n=1}^{P} C_n k(x_n y)\right|^2 \mathrm{d}y \geqslant 0.$$

由于$C_0(G)$在$L^2(G)$中稠密，可以知道，若$f\in L^2(G)$，则$f*\widetilde{f}$是正定连续函数。

引理5 G是交换群，φ: $G\to \boldsymbol{C}$是正定函数，则

(1) $\varphi(e)\geqslant 0$。

(2) $\varphi(x^{-1})=\overline{\varphi(x)}$，$\forall x\in G$。

(3) $|\varphi(x)|\leqslant\varphi(e)$，$\forall x\in G$。

(4) 若$x,y\in G$，则

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2\leqslant 2\varphi(e)\left(\varphi(e)-\mathrm{Re}\varphi(xy^{-1})\right).$$

证 φ是G上的正定函数，故

$$\sum_{n,m=1}^{P} C_n\overline{C_m}\varphi(x_n x_m^{-1})\geqslant 0$$

对一切$P\in N$，$C_n\in\boldsymbol{C}$，$x_n\in G(n=1,2,\cdots,P)$是成立的。

(1) 取$P=1$，$x_1=e$，$C_1=1$，得$\varphi(e)\geqslant 0$。

(2) 取$P=2$，$x_1=e$，$x_2=x$，$C_1=1$，$C_2=C$，得

$$(1+|C|^2)\varphi(e)+\overline{C}\varphi(x^{-1})+C\varphi(x)\geqslant 0. \qquad (3)$$

又$(1+|C|^2)\varphi(e)$是实数，在上式中取$C=1$得

$$\varphi(x^{-1})+\varphi(x)\in\boldsymbol{R}.$$

取$C=i$，得 $\quad i(-\varphi(x^{-1})+\varphi(x))\in\boldsymbol{R}$，

从而有 $\quad \varphi(x^{-1})=\overline{\varphi(x)}$。

(3) 在(3)式中取$|C|=1$且使$C\varphi(x)=-|\varphi(x)|$，则得

$$2\varphi(e)-2|\varphi(x)|\geqslant 0.$$

所以 $\quad |\varphi(x)|\leqslant\varphi(e)$。

(4) $x,y\in G$，不妨设$\varphi(x)\neq\varphi(y)$，取$P=3$，$x_1=e$，$x_2=x$，$x_3=y$，$C_1=1$，$C_2=\lambda\dfrac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\varphi(x)-\varphi(y)}$，其中$\lambda\in R$，$C_3=-C_2$，且利用(2)的结果，得

$$(1+2\lambda^2)\varphi(e)+2\lambda|\varphi(x)-\varphi(y)|-2\lambda^2\mathrm{Re}\varphi(xy^{-1})\geqslant 0.$$

化简得　$2[\varphi(e)-\mathrm{Re}\varphi(xy^{-1})]\lambda^2+2|\varphi(x)-\varphi(y)|\lambda+\varphi(e)\geqslant 0.$

以上 λ 的二次不等式，对一切$\lambda\in\boldsymbol{R}$是成立的，故其判别式是非正的．即

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2-2[\varphi(e)-\mathrm{Re}\varphi(xy^{-1})]\varphi(e)\leqslant 0.$$

引理得证。

由以上引理的(4)知，若 φ 在 e 点连续，则 φ 在G上一致连续．事实上，φ在 e 点连续，则任给 $\varepsilon>0$，存在$U\in\mathcal{N}_e$，当$xy^{-1}\in U$，有 $|\varphi(e)-\varphi(xy^{-1})|<\varepsilon$。所以 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$。

引理 6　设$f\in L^1(G)$，φ 是G上的连续正定函数，则

$$\left|\int f\varphi\mathrm{d}m\right|\leqslant\varphi(e)\|\hat{f}\|_\infty.$$

证　f，$g\in L^1(G)$．令$\langle f, g\rangle=\int(f*\tilde{g})\varphi\mathrm{d}m$，则

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle&=\iint f(y)\tilde{g}(y^{-1}x)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\iint f(y)\overline{g(x^{-1}y)}\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\iint f(xy)\overline{g(y)}\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\iint f(x)\overline{g(y)}\varphi(xy^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

$\langle f, g\rangle$是一个半内积．事实上有

(1) $f\to\langle f, g\rangle$是线性的．显然成立。

(2) $\overline{\langle f, g\rangle}=\langle g, f\rangle$．由$\varphi(x^{-1})=\overline{\varphi(x)}$立即得到．

(3) $\langle f, f\rangle\geqslant 0$。

因为$C_c(G)$在$L^1(G)$中稠密，只需证明若$k\in C_c(G)$，

则　$$\langle k, k\rangle=\iint k(x)\overline{k(y)}\varphi(xy^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

由 φ 的一致连续性知，任给 $\varepsilon>0$，存在$W\in\mathcal{N}_e$，若$x\in yW$，

则 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon$. 又$(x, y)\to xy^{-1}$是连续的，存在$U\in\mathcal{N}$，使$UU^{-1}\subset W$。令$K=\text{supp}k$，则$\text{supp}(k(x)\overline{k(y)})\subset K\times K$。又由于$K$是紧集，存在$a_1,a_2,\cdots,a_p\in K$及$K$的互不相交的子集$E_1$，$E_2$，$\cdots,E_p$，使得

$$K=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_p,\quad 且E_n\subset a_nU,\quad n=1,2,\cdots,p.$$

若$x\in E_n$，$y\in E_m$，则$xy^{-1}\in a_na_m^{-1}UU^{-1}\subset a_na_m^{-1}W$。故

$$|\varphi(xy^{-1})-\varphi(a_na_m^{-1})|\leqslant\varepsilon.$$

于是
$$\begin{aligned}&\left|\int_{E_n}\int_{E_m}k(x)\overline{k(y)}\varphi(xy^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right.\\&\left.-\int_{E_n}\int_{E_m}k(x)\overline{k(y)}\varphi(a_na_m^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\varepsilon\int_{E_n}\int_{E_m}|k(x)|\ |\overline{k(y)}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\varepsilon\int_{E_n}|k(x)|\mathrm{d}x\int_{E_m}|k(y)|\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

令$C_n=\int_{E_n}k(x)\mathrm{d}x$，并将上式对$n$，$m$求和，得

$$|\langle k,\ k\rangle-\sum_{n,m=1}^{p}C_n\overline{C_m}\varphi(a_na_m^{-1})|\leqslant\varepsilon(\int_K|k(x)|\mathrm{d}x)^2,$$

φ是正定函数，所以$\sum_{n,m=1}^{p}C_n\overline{C}_m\varphi(a_na_m^{-1})\geqslant 0$，$\varepsilon$是任意的。故$\langle k,k\rangle\geqslant 0$.

以上证明了$\langle f,\ g\rangle$是半内积，由Schwarz不等式有

$$|\langle f,\ g\rangle|^2\leqslant\langle f,\ f\rangle\langle g,\ g\rangle.$$

$$\begin{aligned}\left|\int(f*\tilde{f})\varphi\mathrm{d}x\right|&=\left|\iint f(x)\overline{f(y)}\varphi(xy^{-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\varphi(e)(\int|f(x)|\mathrm{d}x)(\int|f(y)|\mathrm{d}y)\\&=\varphi(e)\|f\|_1^2.\end{aligned}$$

即 $$\langle f, f\rangle \leqslant \varphi(e)\|f\|_1^2. \tag{4}$$

$L^1(G)$有近似单元e_λ，即当$\lambda\to\infty$时，$f*e_\lambda\to f$.

所以 $$\left|\int(f*e_\lambda-f)\varphi\mathrm{d}m\right| \leqslant \varphi(e)\|f*e_\lambda-f\|_1\to 0.$$

今取e_λ满足$\widetilde{e_\lambda}=e_\lambda$，即$e_\lambda$为对称的且取实数值，则

$$\left|\int f\varphi\mathrm{d}m\right|^2=\lim_\lambda\left|\int(f*e_\lambda)\varphi\mathrm{d}m\right|^2=\lim_\lambda|\langle f\quad e_\lambda\rangle|^2$$
$$\leqslant\lim_\lambda\langle f,f\rangle\langle e_\lambda, e_\lambda\rangle.$$

由(4)式知$\langle e_\lambda, e_\lambda\rangle\leqslant\varphi(e)\|e_\lambda\|_1^2=\varphi(e)$，故

$$\left|\int f\varphi\mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)\langle f, f\rangle=\varphi(e)\int(f*\tilde{f})\varphi\mathrm{d}m. \tag{5}$$

令$h=f*\tilde{f}$，则$\tilde{h}=\tilde{f}*f=h$，$h\in L^1(G)$.（5）式可

写成 $$\left|\int f\varphi\mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)\int h\varphi\mathrm{d}m.$$

由(5)式知

$$\left|\int h\varphi\mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)\int(h*h)\varphi\mathrm{d}m=\varphi(e)\int h^{(2)}\varphi\mathrm{d}m,$$

上式为一个逆推公式，其一般形式为

$$\left|\int h^{(2^n)}\varphi\mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)\int h^{(2^{n+1})}\varphi\mathrm{d}m, \tag{6}$$

反复利用(6)式，得

$$\left|\int f\varphi\mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)^{1+\frac{1}{2}}\left(\int h^{(2)}\varphi\mathrm{d}m\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\varphi(e)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\left(\int h^{(4)}\varphi\mathrm{d}m\right)^{1/4}$$

$$\leqslant\cdots\leqslant\varphi(e)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}\left(\int h^{(2^n)}\varphi\mathrm{d}m\right)^{1/2^n}.$$

由(4)有 $\left(\int h^{(2^n)}\varphi \mathrm{d}m\right)^{1/2^n}\leqslant\varphi(e)^{1/2^n}\|h^{(2^n)}\|_1^{1/2^n}$.

令$n\to\infty$，利用谱半径定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\|f^n\|_1^{1/n}=\|\hat{f}\|_\infty$，得

$$\left|\int f\varphi \mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)^2\|\hat{h}\|_\infty.$$

又$\hat{h}=\hat{f}\,\widehat{\tilde{f}}=\hat{f}\,\overline{\hat{f}}=|\hat{f}|^2$. 所以$\left|\int f\varphi \mathrm{d}m\right|^2\leqslant\varphi(e)^2\|\hat{f}\|_\infty^2$.

引理得证.

定理 9 (Bochner定理)。若φ：$G\to \boldsymbol{C}$是连续正定函数，则存在唯一的$\mu\in M(\Gamma)$，使得$\check{\mu}=\varphi$，且$\mu\geqslant0$.

证 唯一性由定理8得证. 下面证明存在性，利用引理6定义映射T：$A(\Gamma)\to\boldsymbol{C}$如下：

$$T(\hat{f})=\int f\varphi \mathrm{d}m,\qquad f\in L^1(G).$$

由引理6知，若$\hat{f}=\hat{g}$，则$T(\hat{f})=T(\hat{g})$，故T是有确切意义的. 显然T是线性的，且由引理6知，$\|T\|\leqslant\varphi(e)$. 又$A(\Gamma)$在$C_\infty(\Gamma)$内是稠密的，故可唯一地将T扩张到$C_\infty(\Gamma)$上，得$\mu\in C_\infty(\Gamma)^*$. 且

$$\|\mu\|=\|T\|\leqslant\varphi(e).$$

又$C_\infty(\Gamma)^*=M(\Gamma)$. 所以$\mu\in M(\Gamma)$.

$$\int f\varphi \mathrm{d}m=T(\hat{f})=\mu(\hat{f})=\int\hat{f}\,\mathrm{d}\mu=\int\check{\mu}f\mathrm{d}m,$$

即
$$\int f(\varphi-\check{\mu})\mathrm{d}m=0.$$

由于φ，$\check{\mu}$是连续函数，$f\in L^1(G)$是任意的，故$\check{\mu}=\varphi$.

再证$\mu\geqslant0$. 已知$\|\mu\|=|\mu|(\Gamma)\leqslant\varphi(e)$.

$$\check{\mu}(e)=\int\overline{\gamma(e)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)=\int1\cdot\mathrm{d}\mu(\gamma)=\mu(\Gamma).$$

又 $\check{\mu}(e)=\varphi(e)$。于是有$\check{\mu}(e)=\mu(\Gamma)=\varphi(e)\geqslant |\mu|(\Gamma)$，故 $|\mu|=\mu$，即$\mu\geqslant 0$。定理得证

Bochner定理告诉我们，$B(G)=\{\check{\mu}\,|\,\mu\in M(\Gamma)\}$是$G$上连续正定函数的所有的有限线性组合张成的空间.

§7.3 反演公式

引理7 (1)若$f\in L^1(G)$，$\check{\mu}\in B(G)$，则 $f*\check{\mu}=(\hat{f}'\mu)^{\vee}$.

(2)$L^1(G)\cap B(G)$是$L^1(G)$中的稠密子集.

证 (1)$f\in L^1(G)$，$\check{\mu}$是有界连续函数，$\check{\mu}\in L^\infty(G)$，所以 $f*\check{\mu}\in L^\infty(G)$，且

$$(f*\check{\mu})(x)=\int f(y)\check{\mu}(y^{-1}x)\,\mathrm{d}y=\iint f(y)\overline{\gamma(y^{-1}x)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint f(y)\gamma(y)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\mathrm{d}y$$

$$=\iint f(y^{-1})\overline{\gamma(y)}\;\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\mathrm{d}y$$

$$=\iint f'(y)\overline{\gamma(y)}\;\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(\gamma)$$

$$=\int \hat{f}'(\gamma)\overline{\gamma}(x)\mathrm{d}\mu(\gamma)=(\hat{f}'\mu)^{\vee}(x).$$

故 $f*\check{\mu}\in B(G)$，即$L^1(G)*B(G)\subset B(G)$.

(2)若$u\in C_c(G)$，由§7.2例3知$u*\tilde{u}$是正定连续函数，故$u*\tilde{u}\in B(G)$.又$u\in C_c(G)$，则$u\in L^1(G)$.所以$u*\tilde{u}\in L^1(G)$.因此$u*\tilde{u}\in B(G)\cap L^1(G)$.

另外，不妨取u为对称的且$u=\tilde{u}$，令$U=\mathrm{supp}\,u$，则 $\mathrm{supp}\,(u*\tilde{u})=\mathrm{supp}\,u^2\subset U^2$.

$L^1(G)$中有近似单元e_λ，按以上讨论可以取$e_\lambda\in L^1(G)\cap B(G)$.

对于每一个$f\in L^1(G)$有$f=\lim_\lambda(f*e_\lambda)$. 由$f\in L^1(G)$, $e_\lambda\in L^1(G)$知$f*e_\lambda\in L^1(G)$. 又由$f\in L^1(G)$, $e_\lambda\in B(G)$知$f*e_\lambda\in B(G)$. 所以$f*e_\lambda\in L^1(G)\cap B(G)$, 即$L^1(G)\cap B(G)$在$L^1(G)$中是稠密的. 证毕.

定理10 （反演定理）.

(1)若$f\in L^1(G)\cap B(G)$, 则$\hat{f}\in L^1(\Gamma)$.

(2)Γ上存在唯一的Haar测度m_Γ,使得

$$f(x)=\int\hat{f}(\gamma)\gamma(x)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma). \qquad （反演公式）$$

证 若$f\in B(G)$则$f'\in B(G)$, 由Bochner定理知, 存在唯一的$\mu_f\in M(G)$, 使得$\check{\mu}_f=f'$. 注意我们所要证明的反演公式可以写成

$$f'(x)=f(x^{-1})=\int\overline{\gamma(x)}\hat{f}(\gamma)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma)=(\hat{f}m_\Gamma)^\vee,$$

因此问题在于确定m_Γ使$\check{\mu}_f=(\hat{f}m_\Gamma)^\vee$. 由唯一性定理知, 只需确定$m_\Gamma$使$m_\Gamma=\mu_f/\hat{f}$. 为此需证明对任意的$f$, $g\in L^1(G)\cap B(G)$有$\mu_f/\hat{f}=\mu_g/\hat{g}$. 事实上,

$$(\hat{f}\mu_g)^\vee(x)=\int\overline{\gamma(x)}\hat{f}(\gamma)\mathrm{d}\mu_g(\gamma),$$

又

$$\hat{f}(\gamma)\overline{\gamma(x)}=\int f(y)\overline{\gamma(y)}\;\overline{\gamma(x)}\mathrm{d}y$$

$$=\int f(y)\overline{\gamma(xy)}\mathrm{d}y=\int f(x^{-1}y)\overline{\gamma(y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int f_x(y)\overline{\gamma(y)}\mathrm{d}y=\hat{f}_x(\gamma),$$

所以

$$(\hat{f}\mu_g)^\vee(x)=\int\hat{f}_x(\gamma)\mathrm{d}\mu_g(\gamma).$$

再利用引理 4 得

$$(\hat{f}\mu_g)^{\vee}(x)=\int f_x(y)\check{\mu}_g(y)\mathrm{d}y=\int f_x(y)g'(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int f(x^{-1}y)g(y^{-1})\mathrm{d}y.$$

同理，$$(\hat{g}\mu_f)^{\vee}(x)=\int g(x^{-1}y)f(y^{-1})\mathrm{d}y$$

$$=\int g(x^{-1}y^{-1})f(y)\mathrm{d}y=\int g(y^{-1})f(x^{-1}y)\mathrm{d}y.$$

故 $$\hat{f}\mu_g=\hat{g}\mu_f.$$

若$\psi\in C_c(\Gamma)$，取$\gamma\in\mathrm{supp}\psi$，则存在$u\in C_c(G)$使得$\hat{u}(\gamma)\neq 0$. 又$\widehat{u*\tilde{u}}=|\hat{u}|^2$所以$\widehat{u*\tilde{u}}\geqslant 0$且$\widehat{u*\tilde{u}}(\gamma)>0$. 又$u*\tilde{u}$是连续的正定函数，$\widehat{u*\tilde{u}}$也是连续的，且在$\gamma$处$\widehat{u*\tilde{u}}(\gamma)>0$，故存在$\gamma$的一个邻域，在该邻域上$\widehat{u*\tilde{u}}>0$. 又$\mathrm{supp}\psi$是紧的，故存在有限个这种邻域将$\mathrm{supp}\psi$盖住，即存在

$$f=\sum_{k=1}^{n}u_k*\tilde{u}_k,$$

使得$\hat{f}\geqslant 0$且在$\mathrm{supp}\psi$上$\hat{f}>0$.

由以上讨论知，若$\psi\in C_c(\Gamma)$，则存在连续的正定函数$f\in L^1(G)$，使得$\hat{f}\geqslant 0$且在$\mathrm{supp}\psi$上$\hat{f}>0$. 于是$\psi/\hat{f}$是有意义的，在$\mathrm{supp}\psi$上连续且在$(\mathrm{supp}\psi)^c$上，$\psi/\hat{f}=0$.

引入记号“$\psi\prec f$”，它表示$\psi\in C_c(\Gamma)$，f是连续正定函数，$\hat{f}\geqslant 0$且在$\mathrm{supp}\psi$上，$\hat{f}>0$.

若$\psi\prec f$，$\psi/\hat{f}$有意义. 若$\psi\prec g$，则$\psi/\hat{g}$也有意义. 又

$$\int\psi/\hat{f}\,\mathrm{d}\mu_f=\int\frac{\psi}{\hat{f}\,\hat{g}}\hat{g}\,\mathrm{d}\mu_f=\int\frac{\psi}{\hat{f}\,\hat{g}}\hat{f}\,\mathrm{d}\mu_g=\int\psi/\hat{g}\,\mathrm{d}\mu_g.$$

这说明$\int\psi/\hat{f}\,\mathrm{d}\mu_f$与$f$的选取无关，因此可以定义映射：$T$：$C_c(\Gamma)$

$\to \boldsymbol{C}$如下，

$$T(\psi)=\int \psi/\hat{f}\, d\mu_f. \qquad (\psi \prec f)$$

T是线性的. 事实上，若ψ_1，$\psi_2 \in C_c(\Gamma)$，则存在连续正定函数f，$f \geqslant 0$，且在$(\operatorname{supp}\psi_1) \cup (\operatorname{supp}\psi_2)$上$\hat{f}>0$，于是$\psi_1 \prec f$，$\psi_2 \prec f$，$\psi_1+\psi_2 \prec f$，且$\dfrac{\psi_1+\psi_2}{\hat{f}}=\dfrac{\psi_1}{\hat{f}}+\dfrac{\psi_2}{\hat{f}}$，所以

$$T(\psi_1+\psi_2)=T(\psi_1)+T(\psi_2).$$

T是正的．因为$\hat{f} \geqslant 0$且$\check{\mu}_f=f'$，而f'也是连续的正定函数，由Bochner定理知，f所对应的测度μ_f是正的，故若$\psi \geqslant 0$则$T(\psi) \geqslant 0$.

T是不变的，即$T(\psi_\gamma)=T(\psi)$. 事实上，若在$\operatorname{supp}\psi$上$\hat{f}>0$，则在$\operatorname{supp}\psi_\gamma$上，$\hat{f}_\gamma>0$. 由$\psi_\gamma(\beta) \neq 0$即$\psi(\gamma^{-1}\beta) \neq 0$得$\gamma^{-1}\beta \in \operatorname{supp}\psi$，所以$\hat{f}(\gamma^{-1}\beta)>0$即$\hat{f}_\gamma(\beta)>0$. 又

$$(f\gamma)^{\wedge}(\beta)=\int f(x)\gamma(x)\overline{\beta(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)\overline{\gamma^{-1}\beta(x)}\,\mathrm{d}x=\hat{f}(\gamma^{-1}\beta)=\hat{f}_\gamma(\beta).$$

因此，若$\psi \prec f$，则$\psi_\gamma \prec \gamma f$.

$$T(\psi_\gamma)=\int \frac{\psi_\gamma}{\widehat{\gamma f}}\mathrm{d}\mu_{\gamma f}=\int \frac{\psi_\gamma}{\hat{f}_\gamma}\mathrm{d}\mu_{\gamma f}=\int \left(\frac{\psi}{\hat{f}}\right)_\gamma \mathrm{d}\mu_{\gamma f}.$$

又若$h \in L^1(G)$有

$$\int \hat{h}\,\mathrm{d}\mu_{\gamma f}=\int h\,\check{\mu}_{\gamma f}\mathrm{d}m=\int h(\gamma f)'\,\mathrm{d}m=\int h\overline{\gamma} f'\,\mathrm{d}m=\int h\overline{\gamma}\,\check{\mu}_f\mathrm{d}m$$

$$=\int (h\overline{\gamma})^{\wedge}\,\mathrm{d}\mu_f=\int \hat{h}_{\overline{\gamma}}\,\mathrm{d}\mu_f=\int \hat{h}_{\gamma^{-1}}d\mu_f,$$

$\hat{h} \in A(\Gamma)$，又$A(\Gamma)$在$C_\infty(\Gamma)$中稠密，故上式对$C_\infty(\Gamma)$中的函数

也是成立的．又$\dfrac{\psi}{\hat{f}}\in C_\infty(\Gamma)$．所以

$$T(\psi_\gamma)=\int\left(\frac{\psi}{\hat{f}}\right)_\gamma \mathrm{d}\mu_{\gamma f}=\int\left(\left(\frac{\psi}{\hat{f}}\right)_\gamma\right)_{\gamma^{-1}}\mathrm{d}\mu_f=\int\frac{\psi}{\hat{f}}\mathrm{d}\mu_f=T(\psi),$$

由以上讨论知T是正线性泛函，由Riesz表示定理知，存在一个不变测度和T相对应，该测度即为m_Γ。

事实上，令$\psi\in C_c(\Gamma)$．$f\in L^1(G)\cap B(G)$；$\psi\prec g$，则

$$\int\psi\mathrm{d}\mu_f=\int\frac{\psi}{\hat{g}}\hat{g}\,\mathrm{d}\mu_f=\int\frac{\psi}{\hat{g}}\hat{f}\,\mathrm{d}\mu_g=T(\psi\hat{f}),$$

又 $$T(\psi\hat{f})=\int\psi\hat{f}\,\mathrm{d}m_\Gamma$$

所以 $$\int\psi d\mu_f=\int\psi\hat{f}\,\mathrm{d}m_\Gamma.$$

即 $$\hat{f}m_\Gamma=\mu_f.$$

又μ_f是有限测度，因此$\hat{f}\in L^1(\Gamma)$．(1)得证．

$L^1(G)\cap B(G)$在$L^1(G)$中是稠密的，故总可以取$f\in L^1(G)\cap B(G)$使$\mu_f\neq0$，又ψ是连续函数，可取ψ使

$$T(\psi\hat{f})=\int\psi\mathrm{d}\mu_f\neq0.$$

$T\neq0$，所以$m_\Gamma\neq0$．即m_Γ是不等于零的不变测度，也就是m_Γ是Haar测度．且

$$f(x)=f'(x^{-1})=\check{\mu}_f(x^{-1})=\int\overline{\gamma(x^{-1})}\,\mathrm{d}\mu_f(\gamma)=\int\gamma(x)\mathrm{d}\mu_f(\gamma)$$

$$=\int\hat{f}(\gamma)\gamma(x)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma).\qquad (2)得证.$$

例1 G是紧测，取测度m_G使$m_G(G)=1$，则m_Γ是Γ上的计数

测度.

证 取$\gamma_0\in\Gamma$, γ_0是连续的正定函数，由反演公式得

$$\gamma_0(x)=\int\widehat{\gamma_0}(\gamma)\gamma(x)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma)$$

由定理2知，当G为紧集时，

$$\widehat{\gamma_0}(\gamma)=\begin{cases}1\text{，当}\gamma=\gamma_0,\\0\text{，当}\gamma\neq\gamma_0.\end{cases}$$

所以 $$\gamma_0(x)=\int\chi_{\{\gamma_0\}}(\gamma)\gamma(x)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma)=\gamma_0(x)m_\Gamma(\{\gamma_0\}),$$

故$m_\Gamma(\{\gamma_0\})=1$，即m_Γ为计数测度.

例2 G是离散的，取m_G为计数测度，则$m_\Gamma(\Gamma)=1$.

证 G是离散的，则$\chi_{\{e\}}$是$L^1(G)$中的单元，且为G上的正定连续函数. 这是因为

$$\chi_{\{e\}}(x_nx_m^{-1})=\begin{cases}1\text{，当}x_n=x_m;\\0\text{，当}x_n\neq x_m.\end{cases}$$

$$\sum_{n,m=1}^{p}C_n\overline{C_m}\chi_{\{e\}}(x_nx_m^{-1})=\sum_{n=1}^{p}C_n\overline{C_n}\geqslant 0\text{.}$$

又$\widehat{\chi}_{\{e\}}(\gamma)=1$，由反演公式有

$$1=\chi_{\{e\}}(e)=\int 1\cdot\gamma(e)\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma)=\int\mathrm{d}m_\Gamma(\gamma)=m_\Gamma(\Gamma).$$

例3 $G=\boldsymbol{R}$（实数加法群），已知$\widehat{G}=\Gamma=F(y\to e^{iy})$，在$\boldsymbol{R}$上有Lebesgue测度$m$，取$m_G=am$，$a>0$，取$m_\Gamma=bm$，$b>0$，则$ab=\dfrac{1}{2\pi}$.

证 取$g\geqslant0$且$g\in L^1(\Gamma)$,则$\check{g}$是连续的正定函数，$\check{g}\in B(G)$. 又取$g\geqslant0$，$g\in L^1(\Gamma)$且g为连续函数，同时$\check{g}\in L^1(G)$，则$\check{g}\in L^1(G)\cap B(G)$，由反演公式有

$$\check{\check{g}}(x)=\int \check{g}^{\wedge}(y)e^{iyx}dm_{\Gamma}(y) \qquad (dm_{\Gamma}(y)=bdy)$$

$$\check{g}'(x)=\check{g}(-x)=\int \check{g}^{\wedge}(y)e^{-iyx}dm_{\Gamma}(y)=g^{\vee\wedge\vee}(x),$$

g 是连续的，g' 也连续，又 $g^{\vee\wedge}$ 连续，由唯一性定理知 $g'=g^{\vee\wedge}$.

今取 $g(y)=e^{-|y|}$，显然 g 是连续的，$g\in L^1(\Gamma)$，$g\geqslant 0$

$$\check{g}(x)=b\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|y|}e^{-iyx}dy=\frac{2b}{1+x^2}.$$

所以 $\check{g}(x)\in L^1(G)$.

故 $\quad g(-y)=g'(y)=(g^{\vee})^{\wedge}(y)=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2b}{1+x^2}e^{-iyx}dx.$

即 $\quad e^{-|y|}=2ab\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-iyx}dx.$

令 $y=0$ 得

$$1=2ab\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=2\pi ab.$$

因此 $\quad ab=\frac{1}{2\pi}.$

通常，R 上的Fourier变换取 $a=1$, $b=\frac{1}{2\pi}$ 或 $a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 由此得出

$$\pi e^{-|y|}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-iyx}dx. \qquad (y\in \boldsymbol{R})$$

§7.4 Pontryagin对偶定理

在§7.1中为研究群G与$\widehat{\Gamma}$的关系，引入了G到$\widehat{\Gamma}$的映射α：$\alpha(x)\gamma=\gamma(x)$，证明了$\alpha$是$G$到$\widehat{\Gamma}$的连续的代数同态。本节将进一步证明$\alpha$是1-1映射，$\alpha$是映上$\widehat{\Gamma}$的，且为同胚映射。从而得知$G$和$\widehat{\Gamma}$作为拓扑群是完全一样的。此即Pontryagin对偶定理。

定理11 对于$e\in G$的每一个邻域V，存在一个紧集合$C\subset\Gamma$和$\rho>0$，使得$\{x\in G|\ |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}\subset V$.

证 G是局部紧的，映射$(x,\ y)\to xy^{-1}$是连续的，故存在e的一个紧邻域W，使得$WW^{-1}\subset V$。W是紧的且包含非空开集，所以$0<mW<\infty$.

令$f=\chi_W/\sqrt{mW}$，显然$f\in L^1(G)$同时$f\in L^2(G)$，令$g=f*\widetilde{f}$，则$g\in L^1(G)$且为正定的连续函数，即$g\in L^1(G)\cap B(G)$。由反演公式得

$$g(x)=\int\widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\mathrm{d}\gamma,$$

$$g(e)=\int\widehat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma.$$

又
$$g(e)=f*\widetilde{f}(e)=\int f(x)\widetilde{f}(x^{-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{mW}\int\chi_W\mathrm{d}x=1.$$

所以
$$\int\widehat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma=1,$$

$$\widehat{g}=\widehat{f}\cdot\widehat{\widetilde{f}}=\widehat{f}\cdot\overline{\widehat{f}}=|\widehat{f}|^2\geqslant 0.$$

$\widehat{g}$是连续的，$\widehat{g}\in C_\infty(\Gamma)$，若$x\notin WW^{-1}$，$g(x)=0$，故存在紧集

$C\subset\Gamma$，使得

$$\int_{\Gamma\setminus C}\hat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma<\frac{1}{3}.$$

取$\rho=\frac{1}{3}$，若$x\in G$使得$|\gamma(x)-1|<\frac{1}{3}$对一切$\gamma\in C$成立，则

$$g(x)-1=g(x)-g(e)=\int_{\Gamma}\hat{g}(\gamma)(\gamma(x)-\gamma(e))\mathrm{d}\gamma$$

$$=\int_{\Gamma}\hat{g}(\gamma)(\gamma(x)-1)\mathrm{d}\gamma,$$

$$|g(x)-1|\leqslant\int_{\Gamma}\hat{g}(\gamma)|\gamma(x)-1|\,\mathrm{d}\gamma$$

$$=\int_{\Gamma\setminus C}\hat{g}(\gamma)\,|\gamma(x)-1|\,\mathrm{d}\gamma+\int_{C}\hat{g}(\gamma)\,|\gamma(x)-1|\,\mathrm{d}\gamma.$$

$$\int_{C}\hat{g}(\gamma)\,|\gamma(x)-1|\,\mathrm{d}\gamma<\frac{1}{3}\int_{C}\hat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma\leqslant\frac{1}{3}\int_{\Gamma}\hat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\frac{1}{3}.$$

$$\int_{\Gamma\setminus C}\hat{g}(\gamma)\,|\gamma(x)-1|\,\mathrm{d}\gamma\leqslant2\int_{\Gamma\setminus C}\hat{g}(\gamma)\mathrm{d}\gamma<\frac{2}{3},$$

即
$$|g(x)-1|<1.$$
故$g(x)\neq0$，即$x\in WW^{-1}\subset V$． 定理得证．

推论1 $x_0\{x\in G|\ |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$，$C\subset\Gamma$且为紧集，$\rho>0$，$x_0\in G$，构成域$G$的拓扑的基．

证 $\gamma(x)$是(x,γ)的连续函数，故集合$\{x\in G|\ |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$是开集且包含$e$，因此它是$e$的开邻域，所以

$$x_0\{x\in G|\ |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$$

是x_0的开邻域，它们组成G的拓扑的基，由此知，G的拓扑也是紧开拓扑．

推论2 α：$G\to\hat{\Gamma}$是1-1映射．

证 若$x\neq y$，即$x^{-1}y\neq e$，可以作$V\in\mathcal{N}_e$，使$x^{-1}y\notin V$，由定理11知，存在一个紧集合$C\subset\Gamma$及$\rho>0$，且有某个$\gamma\in C$，使得

$$|\gamma(x^{-1}y)-1|\geqslant\rho.$$

即存在$\gamma\in\Gamma$，使得$\gamma(x^{-1}y)\neq 1$，所以$\gamma(x)\neq\gamma(y)$，即$\alpha(x)\neq\alpha(y)$，故α是1-1映射。

这个推论说明特征标群Γ相当大，可以分离G中的点。

推论3 设H是G的闭子群，$x\notin H$，则存在$\gamma\in\Gamma$满足$\gamma(x)\neq 1$，且在H上$\gamma=1$。

证 作商群G/H。由§6.2知，取G/H中的拓扑，是使映射$\pi:G\to G/H$为连续的拓扑。

当$x\notin H$，则$\dot{x}\neq\dot{e}$故存在$\beta\in\widehat{(G/H)}$使得$\beta(\dot{x})\neq 1$。又$\beta\circ\pi$：$G\to T$是连续的同态映射，且

$$\beta\circ\pi(x)=\beta(\dot{x})\neq 1,$$

$$\beta\circ\pi(h)=\beta(\dot{h})=\beta(\dot{e})=1,\quad h\in H$$

故$\beta\circ\pi=\gamma\in\Gamma$即为所求。

推论4 α是$G\to\alpha(G)\subset\widehat{\Gamma}$的同胚映射。

证 $\alpha(e)$在$\alpha(G)$中的邻域为

$\{\varphi\in\widehat{\Gamma}\mid|\varphi(\gamma)-1|<\rho,\forall\gamma\in C,C\subset\Gamma$且为紧集合$\}\cap\alpha(G)$

$=\{\alpha(x)\mid|\alpha(x)\gamma-1|<\rho,\forall\gamma\in C\}$

$=\{x\in G\mid|\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$.

这也是G中e的邻域，所以α是同胚映射。

引理8 若H是Hausdorff拓扑群G的局部紧子群，则H是闭的。

证 H是局部紧群，故H中的单元e存在一个紧邻域W，H是G的子空间，所以$W=V\cap H$，其中V是G中单元e的邻域。W在H中是紧的，故W在G中也是紧的。而G是T_2空间，从而W是G中的闭集。

设$a\in\overline{H}$，aV^{-1}是a的开邻域，故$aV^{-1}\cap H\neq\phi$。设$b\in aV^{-1}\cap H$，

任给$U\in\mathscr{N}_e$，则$U\cap bV\in\mathscr{N}_e$，故

$$U\cap bV\cap H\neq\phi.$$

所以 $a\in\overline{bV\cap H}=\overline{bV\cap bH}=\overline{b(V\cap H)}=b\ \overline{(V\cap H)}$

$$=b(V\cap H)\subset bH.$$

又$b\in H$，故$bH=H$. 由此知若$a\in\overline{H}$，则$a\in H$。因此H是闭集．引理得证。

定理12（Plancherel定理） 存在唯一的$L^2(G)$到$L^2(\Gamma)$的线性等距满射F，当$f\in L^1(G)\cap L^2(G)$时F就是f的Fourier变换。即$Ff=\hat{f}$.

证 设$f\in L^1(G)\cap L^2(G)$，由于$f\in L^2(G)$知$f*\tilde{f}$是正定连续函数．于是$f\in L^1(G)\cap B(G)$，由反演定理，有

$$f*\tilde{f}(e)=\int(f*\tilde{f})\hat{}\,(\gamma)\gamma(e)\mathrm{d}\gamma.$$

又 $\gamma(e)=1$，$(f*\tilde{f})\hat{}=\hat{f}\,\hat{\tilde{f}}=\hat{f}\cdot\overline{\hat{f}}=|\hat{f}|^2$，

上式化为 $$f*\tilde{f}(e)=\int|\hat{f}|^2d\gamma.$$

另一方面，

$$f*\tilde{f}(e)=\int f(y)\tilde{f}(y^{-1}e)\mathrm{d}y=\int f(y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}y=\int|f(y)|^2\mathrm{d}y,$$

所以有 $$\int|f(y)|^2\mathrm{d}y=\int|\hat{f}(\gamma)|^2\mathrm{d}\gamma.$$

以上说明，若$f\in L^1(G)\cap L^2(G)$，则$\hat{f}\in L^2(\Gamma)$且$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$。也就是说，f到$\hat{f}$的映射是线性的。且保持范数。

$L^1(G)\cap L^2(G)$稠密于$L^2(G)$．$f\to\hat{f}$是定义在$L^2(G)$的稠密子空间$L^1(G)\cap L^2(G)$上的等距线性映射，它可以唯一地扩张为F：$L^1(G)\to L^2(G)$，F是等距线性映射，以R_F表示F的值域，由于$L^2(G)$是完备的，F是等距线性映射，所以R_F是完备空

间$L^2(\Gamma)$的完备子空间，从而R_F是闭的。

下面证明$R_F=L^2(\Gamma)$.只需证明，若$\varphi\in R_F^{\perp}$，则$\varphi=0$，a、e.

若$f\in L^1(G)\cap L^2(G)$，$x\in G$，则$\hat{f}_x\in R_F$故$\varphi\perp\hat{f}_x$. 即

$$0=\int\hat{f}_x(\gamma)\overline{\varphi(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\varphi(\gamma)}\;\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\gamma$$

$$=(\hat{f}\,\overline{\varphi})^{\vee}(\gamma),$$

由唯一性定理得$\hat{f}\,\overline{\varphi}=0$.

对于每一个紧集$C\subset\Gamma$，存在$f\in C_c(G)$，使得在C上$\hat{f}>0$，从而在C上几乎处处有$\varphi=0$，又$\varphi\in L^2(\Gamma)$，所以在σ-紧集外$\varphi=0$. 于是得$\varphi=0$. a、e.

定理13 （Parseval公式）若$f,g\in L^2(G)$，则

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma, \qquad (7)$$

$$\int f(x)g(x^{-1})\,\mathrm{d}x=\int\hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma. \qquad (8)$$

证 由第四章§4.1中的极化公式知，Hilbert空间的内积可用范数表示。又$f\to\hat{f}$是等距线性映射。公式(7)得证. 由(7)式即可证明(8)式，事实上，

$$\int f(x)g(x^{-1})\,\mathrm{d}x=\int f(x)\overline{\overline{g(x^{-1})}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int f(x)\overline{\tilde{g}(x)}\,\mathrm{d}x=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\tilde{g}}}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma$$

$$=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\overline{\hat{g}}}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma=\int\hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma.$$

证毕.

引理9 若$g\in L^2(G)$，$\gamma\in\Gamma$，则$\gamma g\in L^1(G)$，且

$$(\gamma g)^{\wedge}=\hat{g}_{\gamma}.$$

证 以上结论对$g\in L^1(G)\cap L^2(G)$是成立的，又$L^1(G)\cap L^2(G)$在$L^2(G)$中稠密，故对$g\in L^2(G)$结论仍成立。

引理10 若f，$g\in L^2(G)$，则$fg\in L^1(G)$且$\widehat{fg}=\hat{f}*\hat{g}$。

证 $\beta\in\Gamma$，$(\widehat{fg})(\beta)=\int f(x)g(x)\overline{\beta(x)}\,\mathrm{d}x$

$$=\int f(x)\overline{(\beta\bar{g})}(x)\,\mathrm{d}x=\int\hat{f}(\gamma)\overline{(\widehat{\beta\bar{g}})(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma$$

$$=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\bar{g}}}(\beta^{-1}\gamma)\mathrm{d}\gamma=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\bar{g}}}'(\gamma^{-1}\beta)\mathrm{d}\gamma$$

$$=\int\hat{f}(\gamma)\overline{\hat{\tilde{g}}}(\gamma^{-1}\beta)\,\mathrm{d}\gamma=\int\hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma^{-1}\beta)\mathrm{d}\gamma$$

$$=(\hat{f}*\hat{g})(\beta).$$

定理14 $A(\Gamma)=\{f_1*f_2\,|f_1,\ f_2\in L^2(\Gamma)\}$.

证 由定义$A(\Gamma)=\{\hat{f}\,|f\in L^1(G)\}$，若取$f_1$，$f_2\in L^2(\Gamma)$，则存在$g_1$，$g_2\in L^2(G)$，使得$\hat{g}_1=f_1$，$\hat{g}_2=f_2$。从而

$$f_1*f_2=\hat{g}_1*\hat{g}_2=\widehat{g_1g_2}\in A(\Gamma),$$

即
$$A(\Gamma)\supset\{f_1*f_2\,|f_1,\ f_2\in L^2(\Gamma)\}.$$

反之，设$h\in A(\Gamma)$，则存在$f\in L^1(G)$使得$\hat{f}=h$．且存在g_1，$g_2\in L^2(G)$，使得$f=g_1g_2$，于是

$$h=\hat{f}=\widehat{g_1g_2}=\hat{g}_1*\hat{g}_2,$$

其中$\hat{g}_1$，$\hat{g}_2\in L^2(\Gamma)$。这表明$A(\Gamma)\subset\{f_1*f_2\,|f_1,\ f_2\in L^2(\Gamma)\}$，

所以
$$A(\Gamma)=\{f_1*f_2\,\big|\,f_1,\ f_2\in L^2(\Gamma)\}.$$

定理15 若$K\subset\Gamma$是紧集，$V\subset\Gamma$是开集，且$K\subset V$，则存在$h\subset A(\Gamma)$，$0\leqslant h\leqslant 1$，在K上$h=1$，在V^c上$h=0$。

证 可以构造一个开集W包含K，$\overline{W}$是紧的且含于V，即$K\subset W\subset\overline{W}\subset V$。

取单元e的紧对称邻域U，使得$KU\subset W$，且$\overline{W}U\subset V$。由于紧集的测度是有限的，故$\chi_{\overline{W}}$，$\chi_U\in L^2(\Gamma)$，从而$\chi_{\overline{W}}*\chi_U\in A(\Gamma)$。又

$$\chi_{\overline{W}}*\chi_U(\gamma_0)=\int\chi_{\overline{W}}(\gamma)\chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0)\mathrm{d}\gamma.$$

当$\gamma\in\overline{W}$且$\gamma^{-1}\gamma_0\in U$，则被积函数不等于零，又$\gamma^{-1}\gamma_0\in U$即$\gamma\in\gamma_0U^{-1}=\gamma_0U$。所以当$\gamma\in\overline{W}\cap\gamma_0U$时被积函数为1，否则被积函数为零。故

$$\int\chi_{\overline{W}}(\gamma)\chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0)\mathrm{d}\gamma=m_\Gamma(\overline{W}\cap\gamma_0U).$$

若$\gamma_0\in K$，则$\gamma_0U\subset\overline{W}$，所以$m_\Gamma(\overline{W}\cap\gamma_0U)=m_\Gamma(\gamma_0U)=m_\Gamma(U)$。若$\gamma_0\notin V$，则$\gamma_0U\cap\overline{W}=\phi$。否则若$\beta\in\gamma_0U\cap\overline{W}$则$\beta\in\overline{W}$，且$\beta\in\gamma_0U$。则$\gamma_0=\beta u^{-1}\subset\overline{W}U\subset V$，与$\gamma_0\notin V$矛盾。故

$m_\Gamma(\overline{W}\cap\gamma_0V)=0$。即

$$\int\chi_{\overline{W}}*\chi_U(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\int\chi_{\overline{W}}(\gamma)\chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0)\mathrm{d}\gamma=\begin{cases}m_\Gamma(U), & \gamma_0\in K;\\ 0, & \gamma_0\notin V.\end{cases}$$

取 $h=\dfrac{\chi_{\overline{W}}*\chi_U}{m_\Gamma(U)}$ 即为所求。证毕。

推论5 若A、B可测，且测度不等于零，则$(AB)^\circ\neq\phi$。

证 因A、B的测度不等于零，故可找到$A_1\subset A$，$B_1\subset B$。且$0<m(A_1)<\infty$，$0<m(B_1)<\infty$。因此存在紧集合C，D，使得$C\subset A_1\subset A$，$D\subset B_1\subset B$且$mC>0$，$mD>0$，则$\chi_C*\chi_D$是连续函数，且在某一点大于0，故AB中含非空开集。

定理16 α是G到$\widehat{\Gamma}$上的满射。

证 设$\alpha(G)\neq\widehat{\Gamma}$，则$[\alpha(G)]^c$是非空开集。在$[\alpha(G)]^c$中任取一点$\varphi$。$\{\varphi\}$是紧的，$\{\varphi\}\subset[\alpha(G)]^c$。由定理15知，存在$h\in$

$A(\hat{\Gamma})$使得在$\{\varphi\}$上$h\neq 0$．在$[(\alpha(G))^{\circ}]^{\circ}=\alpha(G)$上$h=0$．又$h=\hat{g}$，$g\in L^1(\Gamma)$，所以在$G$上$\check{g}=0$．由唯一性定理知$g=0$，从而$h=0$。此与$h\neq 0$矛盾．定理得证．

至此证明了$\alpha: G\to\hat{\Gamma}$是连续的代数同态，α是1-1的且为G到$\hat{\Gamma}$上的同胚映射．由此得到以下重要结论．

定理17 （Pontryagin对偶定理）$\alpha: G\to\hat{\hat{G}}$是拓扑群的同构映射．即$G$和$\hat{\hat{G}}$作为拓扑群是完全一样的．记作$G\cong\hat{\hat{G}}$．

注1 定理5给出$\beta N(K,\rho)$组成Γ拓扑的基，其中$N(K,\rho)=\{\gamma\in\Gamma \mid |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall x\in K,\ K\subset G$是紧集，$\rho>0\}$．若再考虑$\Gamma$的特征标群$\hat{\Gamma}$，同样对$\rho>0$，$C\subset\Gamma$是紧集，$N(C,\rho)=\{\varphi\in\hat{\Gamma} \mid |\varphi(\gamma)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$也是$\hat{\Gamma}$中单元$e$的开邻域．

$\alpha: G\to\hat{\Gamma}$是拓扑群的同构映射，即$\hat{\Gamma}=G$．由于$\varphi=\alpha(x)$，$\varphi(\gamma)=\gamma(x)$，故

$$N(C,\rho)=\{x\in G \mid |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall\gamma\in C\}$$

是G中单元e的开邻域．这就是定理11的推论1的结论．

注2 $\mu\in M(\Gamma)$．$\check{\mu}=\int\overline{\gamma(x)}\,d\mu(\gamma)$．自然可以定义$\hat{\mu}$：$\hat{\Gamma}\to C$如下：$\hat{\mu}(\varphi)=\int\overline{\varphi(\gamma)}\,d\mu(\gamma)$．又$\varphi=\alpha(x)$且$\varphi(\gamma)=\alpha(x)\gamma=\gamma(x)$，得$\hat{\mu}(\varphi)=\check{\mu}(x)$由此可知

$B(\hat{\Gamma})=\{\hat{\mu} \mid \mu\in M(\Gamma)\}$，$B(G)=\{\check{\mu} \mid \mu\in M(\Gamma)\}$，

二者是完全一样的．

推论6 若$\mu\in M(G)$且$\hat{\mu}\in L^1(\Gamma)$则$\mu\in M_a(G)$．即$\hat{\mu}=f,m$，其中$f\in L^1(G)$．且$\hat{\mu}=\hat{f}$

证 $B(\Gamma)=\{\hat{\mu} \mid \mu\in M(G)\}$．由于$\hat{\mu}\in L^1(\Gamma)$．故$\hat{\mu}\in$

$L^1(\Gamma)\cap B(\Gamma)$，由反演公式知$\hat{\hat{\mu}}=L^1(\hat{\Gamma})$，且

$$\hat{\mu}(\gamma)=\int\hat{\hat{\mu}}(\varphi)\varphi(\gamma)d\varphi;$$

故
$$\hat{\mu}'(\gamma)=\int\hat{\hat{\mu}}(\varphi)\varphi(\gamma^{-1})d\varphi=\int\hat{\hat{\mu}}\,\overline{\varphi(\gamma)}\,d\varphi=\check{\hat{\hat{\mu}}},$$

即$\hat{\mu}=\check{\hat{\hat{\mu}}}'$.今定义$f(x)$如下：

$$f(x)=\hat{\hat{\mu}}'(\alpha(x))=\hat{\hat{\mu}}(\alpha(x)^{-1}).$$

则
$$f'(x)=\hat{\hat{\mu}}(\alpha(x)),$$

所以
$$f'(x)=\int\hat{\mu}(\gamma)\overline{\alpha(x)\gamma}\,d\gamma=\int\hat{\mu}(\gamma)\overline{\gamma(x)}\,dx.$$

故
$$\hat{f'}(x)=\int f'(x)\overline{\gamma(x)}\,dx=\iint\hat{\mu}(\gamma_o)\overline{\gamma_o(x)}\ \overline{\gamma(x)}\,d\gamma_o dx.$$

$$=\iint\hat{\mu}(\gamma_o)\overline{\varphi(\gamma_o)}\ \overline{\varphi(\gamma)}\,d\gamma_o d\varphi$$

$$=\iint\hat{\hat{\mu}}(\varphi)\overline{\varphi(\gamma)}d\varphi=\check{\hat{\hat{\mu}}},$$

即
$$\hat{f}=\check{\hat{\hat{\mu}}}'=\hat{\mu}.$$

又因为$f(x)=\hat{\hat{\mu}}(\alpha(x)^{-1})$，所以$f(x)\in L^1(\hat{\Gamma})$，即$f(x)\in L^1(G)$.且$f(x)\in B(\hat{\Gamma})$即$f(x)\in B(G)$.故$f(x)\in L^1(G)\cap B(G)$.

由反演定理及以上推论，得出以下结论.

定理18 若$f\in L^1(G)$，则$f\in B(G)$的充要条件是$\hat{f}\in L^1(\Gamma)$.

由该定理知，若记$A_1=\{f\in L^1(G)\mid\hat{f}\in L^1(\Gamma)\}$，则$A_1$与$L^1(G)\cap B(G)$是完全一致的.

推论7 $\mu\in M(G)$，若$\hat{\mu}=0$则$\mu=0$.

证 将G看成Γ的特征标群，则$\hat{\mu}=\check{\mu}$. 由唯一性定理得$\mu=$

0.

推论8 $M(G)$是半单纯的.

证 $\mu\in M(G)$, $\hat{\mu}$: $\Gamma\to C$是μ的Fourier—stieltjes变换:

$\hat{\mu}(\gamma)=\int\overline{\gamma(x)}\,d\mu(x)$. 则任给$\gamma\in\Gamma$, 映射

$$\varphi_\gamma:\ \mu\to\hat{\mu}(\gamma)$$

是$M(G)\to C$的非零代数同态.

事实上, 任给$\gamma\in\Gamma$, 总可以取μ使$\hat{\mu}(\gamma)\neq 0$. 且显然有$(\mu+\gamma)\hat{}=\hat{\mu}+\hat{\gamma}$, $(\mu*\gamma)\hat{}=\hat{\mu}\hat{\gamma}$.

假设$\varphi(\mu)=0$对一切$\varphi\in\mathscr{M}(M(G))$成立, 则由于$\varphi_\gamma\in\mathscr{M}(M(G))$得$\varphi_\gamma(\mu)=0$对一切$\gamma\in\Gamma$成立, 亦即$\hat{\mu}(\gamma)=0$. 所以$\mu=0$,故$M(G)$是半单纯的.

推论9 $L^1(G)$是半单纯的.

推论10 $L^1(G)$具有单元的充分必要条件是G是离散的.

证 若G是离散的, 则$M_a(G)=M(G)$, $L^1(G)$有单元. 反之, 若$L^1(G)$有单元, 则其极大理想空间Γ是紧的, 故$\hat{\Gamma}$是离散的(见§7.1). 再由对偶定理知G是离散的.

利用推论10我们研究G的紧化问题. 若G是局部紧的交换群, Γ是G的特征标群, 仍为局部紧的交换群. 若对群Γ取离散拓扑, 则Γ是具有离散拓扑的交换群, 记作Γ_a, 则$\hat{\Gamma}_a$是紧的, 记作$\overline{G}$, 即$\hat{\Gamma}_a=\overline{G}$, $\overline{G}$称为G的Bohr紧化.

今定义映射β: $G\to\overline{G}$如下:

$$\beta(x)\gamma=\gamma(x)$$

显然若G是紧的, 则γ是离散的, 故$\Gamma_a=\Gamma$, 所以由对偶定理知$\overline{G}=G$, 因此$\beta=\alpha$. 现给出β的性质.

(1) β是$G\to\overline{G}$的1-1映射.

因Γ分离G中的点, 若$\beta(x)\neq\beta(y)$则$\gamma(x)\neq\gamma(y)$所以$x\neq y$.

(2) β是$G\to\overline{G}$的同构映射. 显然成立.

（3）β是连续的（读者自证）.

（4）$\beta(G)$稠密于$\overline{G}$（读者自证）.

$\beta(G)$稠密于$\overline{G}$，是指对于Γ_a上的每一个特征标φ，都可以找到Γ上的连续特征标ψ逼近φ。这是因为Γ_a是离散拓扑，连续特征标群就是特征标群。$\overline{G}$上的拓扑是紧开拓扑，可用$N(C,\rho)$描述ψ逼近φ，Γ_a是离散的，Γ_a中的紧集合就是有限集合，故$\beta(G)$在$\overline{G}$中稠密是指对$\widehat{\Gamma}_a$中的每一个φ，对于有限多个γ_1，γ_2，…，$\gamma_n\in\Gamma_a$．和$\rho>0$，存在Γ上的连续特征标ψ，使得

$$|\varphi(\gamma_i)-\psi(\gamma_i)|<\rho,\quad\forall i.$$

记
$$\mathrm{Trig}(G)=\left\{\sum_{n=1}^{P}C_n\gamma_n \,\middle|\, C_n\in\boldsymbol{C},\ \gamma_n\in\Gamma\right\}.$$

显然当$G=R$时，$\mathrm{Trig}(G)$就是$\boldsymbol{R}$上的三角多项式。

推论11 若G是紧的，则$\mathrm{Trig}(G)$在$C(G)$中是稠密的。

证 显然$\mathrm{Trig}(G)$是$C(G)$中的一个子代数，$\mathrm{Trig}(G)\ni1$．因γ分离G中的点，故$\mathrm{Trig}(G)$分离G中的点、若$\gamma\in\Gamma$则$\overline{\gamma}\in\Gamma$，故若$f\in Trig(G)$则$\overline{f}\in\mathrm{Trig}(G)$.由Stone-Weiertrass定理知$\mathrm{Trig}(G)$在$C(G)$中是稠密的。

定义4 $f\in C(G)$，若$f\in Cl\,(Trig(G))$，则称f为殆周期函数(*Almost periodic function*)。

记 $AP(G)=\{f\,|f\in C(G)$且f为殆周期函数$\}$，由推论11知，若G是紧的，则$AP(G)=C(G)$．可以证明以下事实（证明从略）.

（1）若$f\in C(\overline{G})$，则$f|_{\beta(G)}=AP(G)$.

（2）若$g\in AP(G)$．则g可以扩张成$\overline{G}$上的连续函数f，即$f\in C(\overline{G})$.

（3）$\overline{G}$就是$AP(G)$的极大理想空间。

§7.5 商群和子群的特征标群

G是局部紧交换群，H是G的闭子群、本节研究商群G/H的特征标群$\widehat{G/H}$及H的特征标群$\widehat{H}$.

定义 5 称 $H^{\perp}=\{\gamma\in\Gamma\,|\gamma(x)=1,\ \ \forall x\in H\}$ 为 H 的零化子(*Annihilator*)。

显然，对于某个固定的$x\in H$，由$\gamma(x)$是$(x,\ \gamma)$的连续函数知$\{\gamma\in\Gamma|\,\gamma(x)=1\}$是闭集，所以

$$H^{\perp}=\bigcap_{x\in H}\{\gamma\in\Gamma\,|\gamma(x)=1\}$$

是闭集。

又$H^{\perp}$是Γ的一个子群。事实上，若$\gamma_1\in H^{\perp}$,$\gamma_2\in H^{\perp}$,则$\gamma_1\gamma_2(x)=\gamma_1(x)\gamma_2(x)$, $\forall x\in H$.所以$\gamma_1\cdot\gamma_2\in H^{\perp}$,由于$\gamma^{-1}(x)=\overline{\gamma(x)}$，所以若$\gamma\in H^{\perp}$，则$\gamma^{-1}(x)\in H^{\perp}$，因此$H^{\perp}$是一个群.

由以上讨论知$H^{\perp}$是Γ的闭子群.

同理，若$\wedge$是Γ的闭子群，记

$$\wedge_{\perp}=\{x\in G|\,\gamma(x)=1,\ \ \forall\gamma\in\wedge\}.$$

则$\wedge_{\perp}$是G的闭子群。称$\wedge_{\perp}$为$\wedge$的零化子.

定理19 $(H^{\perp})_{\perp}=H$.

证 若$x\in H$，则对一切$\gamma\in H^{\perp}$有$\gamma(x)=1$，所以$x\in(H^{\perp})_{\perp}$，即$H\subset(H^{\perp})_{\perp}$.

若$x\notin H$，考虑映射π：$G\to G/H$，即$x\to\pi(x)=xH$．若$\beta\in\widehat{G/H}$，则$\beta\circ\pi\in\widehat{G}$，由于$x\notin H$即$\dot{x}=\pi x\neq\dot{e}$，故存在$\beta\in\widehat{G/H}$使得$\beta\dot{x}\neq1$。这是因为连续特征标分离点.

记$\gamma=\beta\circ\pi$.由于当$y\in H$则$\pi y=\dot{e}$，故在H上$\gamma=1$即$\gamma\in H^{\perp}$，且$\gamma\neq1$. . 由此知，若$x\notin H$，则存在$\gamma\in H^{\perp}$使得$\gamma(x)\neq1$,所以$x\notin(H^{\perp})_{\perp}$。即若$x\notin H$则$x\notin(H^{\perp})_{\perp}$，故$(H^{\perp})_{\perp}\subset H$. 定理得证.

上面考虑映射π:$G\to G/H$,若$\beta\in\widehat{G/H}$则$\beta\circ\pi\in\widehat{G}$，这样，引入

了一个$\widehat{G/H}\to\widehat{G}$的映射$\hat{\pi}$，定义如下。

$$\hat{\pi}:\ \widehat{G/H}\to\widehat{G},$$
$$\beta\to\hat{\pi}\beta=\beta\circ\pi.$$

下面讨论映射$\hat{\pi}$。由于π是G到G/H的满射，所以$\hat{\pi}$是 1-1 的。事实上，若$\hat{\pi}\beta=\hat{\pi}\beta'$，则$\beta\circ\pi=\beta'\circ\pi$，因为$G/H$中的每一个元素都可以写成$\pi x$，故$\beta\circ\pi(x)=\beta'\circ\pi(x)$，即$\beta(\pi x)=\beta'(\pi x)$，所以$\beta=\beta'$.

又 $\hat{\pi}(\beta_1\beta_2)=(\beta_1\beta_2)\circ\pi=(\beta_1\circ\pi)(\beta_2\circ\pi)=\hat{\pi}(\beta_1)\hat{\pi}(\beta_2)$。因此$\hat{\pi}$是一个代数同态.

再求$\hat{\pi}(\widehat{G/H})$。若$\beta\in\widehat{G/H}$，$\hat{\pi}\beta=\beta\circ\pi$，且若$x\in H$，则$\pi x=e$，故$\beta(\pi x)=1$，即$\hat{\pi}\beta(x)=1$，所以$\hat{\pi}\beta\in H^{\perp}$。即

$$\hat{\pi}(\widehat{G/H})\subset H^{\perp}.$$

又若$\gamma\in H^{\perp}$，寻求$\beta\in\widehat{G/H}$，使$\hat{\pi}\beta=\gamma$。由于$\hat{\pi}$是1-1的，故β是唯一的。今定义为

$$\beta(\pi x)=\gamma(x),$$

这样定义是有确切意义的。事实上，若$\pi x=\pi y$，则$x^{-1}y\in H$，故$\gamma(x^{-1}y)=1$即$\gamma(x)^{-1}\gamma(y)=1$。所以$\gamma(x)=\gamma(y)$。这样一来，对每个$\gamma\in H^{\perp}$有$\beta\in\widehat{G/H}$与之对应。因此

$$\hat{\pi}(\widehat{G/H})=H^{\perp}.$$

以上说明$\hat{\pi}$是$\widehat{G/H}\to H^{\perp}$上的同构映射。再证明$\hat{\pi}$是同胚映射。为此先证明以下引理。

引理11 H是G的闭子群，π是$G\to G/H$的同态映射，若Y是G/H中的紧集，则存在着G中的紧集X，使得$\pi X=Y$。

证 以e_G，$e_{G/H}$分别表示G与G/H中的单元，令u是e_G的一个紧邻域，由于π是连续的开映射，故πu是$e_{G/H}$的一个紧邻域。

Y是G/H中的紧子集，故存在$x_1, x_2, \cdots x_n\in G$使得

$$\bigcup_{i=1}^{n}\pi(x_i u)\supset Y.$$

令 $X=\pi^{-1}Y\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}(x_iu)\right)$,

由于π是连续的，$\pi^{-1}Y$是闭的。又x_iu是紧的，故X是紧集合，且$\pi X=Y$. 引理得证。

$\widehat{G/H}$中单元$e_{\widehat{G/H}}$的邻域的基是$N(Y,\rho)$:

$N(Y,\rho)=\{\beta\in\widehat{G/H}\mid |\beta(y)-1|<\rho,\ \forall y\in Y, Y$ 是 G/H 中的紧集，$\rho>0\}$。

$H^{\perp}$中单元$e_{H^{\perp}}$的邻域的基是$N(x,\rho)\cap H^{\perp}$:

$N(X,\rho)\cap H^{\perp}=\{\gamma\in H^{\perp}\mid |\gamma(x)-1|<\rho,\ \forall x\in X, X$为$G$中的紧集，$\rho>0\}$。

因为π: $G\to G/H$是连续的开映射，若X是G中的紧集，则$\pi X=Y$是G/H中的紧集。又给定$\gamma\in H^{\perp}$，存在$\beta\in\widehat{G/H}$与之对应。故给定$N(X,\rho)$，取$Y=\pi X$，$\beta(y)=\beta\circ\pi x=\hat{\pi}\beta(x)$，则必有$N(Y,\rho)$与之对应。

反之，在$\widehat{G/H}$中给定$N(Y,\rho)$，由引理11知，对于紧集Y，有紧集$X\subset G$，使$\pi X=Y$。又对于$\beta\in\widehat{G/H}$，$\gamma=\beta(\pi x)$。于是得到$H^{\perp}$中的$N(X,\rho)$与$N(Y,\rho)$相对应，所以$\hat{\pi}$是同胚映射，由此有以下定理。

定理20 H是局部紧交换群G的闭子群，π是$G\to G/H$的同态映射，则$\hat{\pi}$: $\beta\to\beta\circ\pi$是$\widehat{G/H}$到$H^{\perp}$上的同构同胚映射，即

$$\widehat{G/H}\cong H^{\perp}.$$

这个定理说明商群G/H的对偶群是G的对偶群的一个闭子群。

由对偶定理知，若Λ是Γ的闭子群，则

$$\widehat{\Gamma/\Lambda}\cong\Lambda_{\perp}(\text{将其看成}\hat{\Gamma}\text{的子集即为}\Lambda^{\perp}).$$

若取$\Lambda=H^{\perp}$，则得$\widehat{\Gamma/H^{\perp}}\cong H$。

又若α: $G_1\to G_2$是拓朴同构，即$G_1\cong G_2$，自然引出$\hat{\alpha}$: $\hat{G}_2\to\hat{G}_1$，$\gamma_2\to\hat{\alpha}\gamma_2$定义为

$$(\hat{\alpha}\gamma_2)g_1=\gamma_2(\alpha g_1),\qquad (g_1\in G_1,\ \alpha g_1\in G_2).$$

于是$\hat{G}_2\cong\hat{G}_1$，即两个特征标群拓扑同构。因此由$\widehat{G/H}\cong H^{\perp}$及$\widehat{\Gamma/H^{\perp}}\cong H$，得 $G/H\cong\widehat{H^{\perp}}$及$\Gamma/H^{\perp}\cong\hat{H}$。

综上所述，得到以下结论。

若G是局部紧交换群，H是G的闭子群，则商群G/H的特征标群$\widehat{G/H}$是$\widehat{G}$的一个闭子群$H^{\perp}$，而子群H的特征标群$\widehat{H}$是特征标群$\widehat{G}$的商群$\widehat{G}/H^{\perp}$。

定理21 若H是G的闭子群，则H的每一个连续特征标都可以扩张成G的连续特征标。即若$\varphi\in\widehat{H}$，则存在$\gamma\in\widehat{G}$，使得$\gamma|_H=\varphi$。

证 因$\widehat{H}\cong\Gamma/H^{\perp}$知，若$\varphi\in\widehat{H}$，在$\varphi$的傍集中任取$\gamma$有$\gamma H^{\perp}=\varphi$。由$H^{\perp}$的定义知，当$x\in H$时，$\gamma(x)=\varphi(x)$。故$\gamma\in\widehat{G}$且$\gamma|_H=\varphi$。定理得证。

对偶定理，商群与子群的特征标群对研究局部紧拓扑群G的性质有着重要的作用。例如可以由$\widehat{G}=\Gamma$的性质反映G的性质，同样由$\widehat{\Gamma}=G$的性质也可以反映Γ的性质。

例 若G是紧交换群，则G是连通的当且仅当Γ是非挠的(*torsion-free*)(即$\gamma\neq e$，则$\gamma^n\neq e$，$\forall n\in N$)。

证 先用反证法证明充分性。

若G是非连通的，则存在$A\subset G$，$\phi\neq A\neq G$。且A是又开又闭的。因A是闭的，G是紧的，$A\subset G$，故A也是紧的。又A是开的，由§6.1拓扑群的性质8知

$$H=\{x\in G\,|xA\subset A且x^{-1}A\subset A\}$$

是开的。显然$e\in H$，且由于$A\neq G$，故$H\neq G$。H是G的真开子群。事实上，若$x,y\in H$，则$(xy)A=x(yA)\subset xA\subset A$，又若$x\in H$则$x^{-1}\in H$。故$(xy)^{-1}A\subset A$。所以$xy\in H$。

由于H是开子群，研究商群G/H。$V\subset G/H$是开集是指$\pi^{-1}V$是开的。又$\pi^{-1}(\dot{e})=H$，故$\{\dot{e}\}$是开集，同时G/H是离散的。

又由定理3知开子群也是闭的，故H是闭的，π：$G\to G/H$是连续的。由于G是紧的，所以G/H也是紧的。G/H是离散的又是紧的，故G/H是有限的，因此$\widehat{G/H}$是有限的。但因$\widehat{G/H}\cong H^{\perp}$，所以$\Gamma$包含了一个非平凡的有限子群$H^{\perp}$。若$\gamma\in H^{\perp}$且$\gamma\neq e$，由于$H^{\perp}$有限，必有$k\in N$使$\gamma^k=e$。故$\Gamma$不是非挠的。充分性得证。

下面再用反证法证明必要性。

若Γ不是非挠的，则存在$\gamma\in\Gamma$，$\gamma\neq e$且有$n\in N$使$\gamma^n=e$，所以

$$\gamma(G)\subset\{z\in \boldsymbol{T}\,|z^n=1\}.$$

因此$\gamma(G)$是不连通的．又由于γ是连续的．故G也是不连通的．必要性得证。

§7.6　结构定理

定义 6　A是交换群，若对每一个$a\in A$及每一个$n\in N$，存在着$x\in A$使得$nx=a$，则称A为可除的．

例如R，$\boldsymbol{T}$，C都是可除的．

引理12　设B是交换群，A是B的可除子群，π是$B\to B/A$的同态映射，则存在$B/A\to B$的同态映射σ，使得

$$\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{B/A},$$

其中符号id_X表示集合X上$X\to X$的恒等映射．

证　设J为B/A的子群，ρ是$J\to B$的同态映射，使得$\pi\circ\rho=\mathrm{id}_J$．

取$u\in B/A\setminus J$，作$J_u=\{V+mu|\ V\in J,\ m\in \boldsymbol{Z}\}$．若能证明存在$J_u\to B$的同态映射$\rho_u$，使得

$$\pi\circ\rho_u=\mathrm{id}_{J_u},$$

且

$$\rho_u|_J=\rho,$$

则利用Zorn引理，即可证明引理．

取$x=\pi^{-1}(u)$．分两种情形讨论。

情形一．若对一切$n\in \boldsymbol{N}$，$nu\notin J$．这时J_u中元素的表现形式是唯一的．事实上，若$V'+m'u=V+mu$，且$m'\geqslant m$，则$V-V'=(m'-m)u$．又$V-V'\in J$，$(m'-m)u\notin J$．所以$V'=V$，$m'=m$．

现定义ρ_u如下：

$$\rho_u(V+mu)=\rho(V)+mx.$$

则ρ_u是$J_u\to B$的同态映射，且

$$\pi\circ\rho_u(V+mu)=\pi\circ\rho(V)+m\pi x=V+mu,$$

即 $$\pi\circ\rho_u=\mathrm{id}_{J_u},$$

且显然 $$\rho_u|_J=\rho.$$

情形二。若存在$k\in N$使$ku\in J$,且设k是使$ku\in J$的最小整数，即若$1\leqslant r\leqslant k$则$ru\notin J$。

因为$\pi x=u$，所以

$$\pi(kx-\rho(ku))=ku-ku=O_{B/A}(B/A\text{中的零元素})。$$

这表明$kx-\rho(ku)\in A$。又A是可除的，故存在$y\in A$,使得$ky=kx-\rho(ku)$，即

$$k(x-y)=\rho(ku)。$$

现定义ρ_u如下：

$$\rho_u(V+mu)=\rho(V)+m(x-y)。$$

这样定义的ρ_u是有意义的、事实上，若$V'+m'u=V+mu$，不妨设$m'\geqslant m$，则$V-V'=(m'-m)u$。设

$$m'-m=lk+r,\ l\geqslant 0,\quad 0\leqslant r<k。$$

因为$V-V'\in J$，故$(m'-m)u=(lk+r)u\in J$。又$ku\in J$，且k是使$ku\in J$的最小整数,所以$r=0$,即$m'-m=lk$。因此$V=V'+lku$。于是

$$\rho(V)=\rho(V'+lku)=\rho(V')+l\rho(ku)=\rho(V')+lk(x-y).$$

$$\rho(V)+m(x-y)=\rho(V')+(lk+m)(x-y)=\rho(V')+m'(x-y).$$

显然，以上定义的ρ_u是$J_u\to B$的同态映射，且

$$\pi\circ\rho_u(V+mu)=\pi\circ\rho(V)+m\pi(x-y)。$$

因为$y\in A$，$\pi y=0$，且$\pi x=u$，所以

$$\pi\circ\rho_u(V+mu)=V+mu,$$

即 $$\pi\circ\rho_u=\mathrm{id}_{J_u},$$

且 $$\rho_u|_J=\rho。$$

由Zorn引理，可以找到σ是$B/A\to B$的同态映射，使得$\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{B/A}$，且$\sigma$是1-1的。引理得证。

进一步可以验证$\sigma(B/A)\cap A=\{0\}$，$\sigma(B/A)+A=B$。事实

上，若$a\in\sigma(B/A)\cap A$，则$a\in A$故$\pi a=0$， 又$a\in\sigma(B/A)$，存在$u\in B/A$使$a=\sigma u$。所以$\pi a=\pi(\sigma u)=u$，即$u=O_{B/A}$。因此$a=\sigma O_{B/A}=O_B$，即$\sigma(B/A)\cap A=\{0\}$。

任取$b\in B$，则$b=\sigma(\pi b)+(b-\sigma\pi(b))$。而

$$\pi(b-\sigma\pi(b))=\pi b-\pi b=0,$$

所以$b-\sigma\pi(b)\in A$，即$B=\sigma(B/A)+A$。

由此得$B\cong A\times(B/A)$。

定义7 G是局部紧的可交换群，若X是G的子集，且G中没有包含X的真闭子集，则称G是由X生成的，或称X生成G。若G是由紧子集生成的，则称G为紧生成的；若G是由有限子集生成的，则称G为有限生成的；若G是由单点子集生成的，则称G为单一的(*monothetic*)。

定理22 若G是单一的，则G作为拓扑群或同构于Z，或为紧的。

证 若G是离散的，则或者G是有限的，或者$G=\boldsymbol{Z}a$，$a\in G$。令$a\longleftrightarrow 1$，则G同构于$\boldsymbol{Z}$。

若G不是离散的。由于G是单一的，故存在$a\in G$，使$G=\overline{\boldsymbol{Z}a}$。现在证明$G=\overline{\boldsymbol{N}a}$，只需证明若$k\in\boldsymbol{Z}$，$k\leqslant 0$，则$ka\in\overline{\boldsymbol{N}a}$。

取0的对称邻域W，则$W\setminus\{ka,\cdots,-a,0,a,\cdots,-ka\}$是非空开集，又$\overline{\boldsymbol{Z}a}=G$，所以$W\setminus\{ka,\cdots,-a,0,a,\cdots,-ka\}$必与$\boldsymbol{Z}a$相交，即存在$n\in\boldsymbol{Z}$，使

$$na\in W\setminus\{ka,\cdots,-a,0,a,\cdots,-ka\},$$

且$|n|>-k$。由于W是对称的，故存在$n>-k$，使$na\in W$，所以$ka+W\ni na+ka=(n+k)a$。又$ka+W$是ka的邻域，且ka的任一邻域$ka+U$有$ka+U\supset ka+W$，故$ka+U\ni(n+k)a$，又$n+k>0$。即$n+k\subset\boldsymbol{N}$，因此$ka\in\overline{\boldsymbol{N}a}$。

令V为0的紧邻域，任取$y\in G$，则

$$(y-V)\cap Na\neq\phi,\ （y-V为y的邻域）.$$

即存在$n\in\boldsymbol{N}$，使$na\in y-V$，即$y\in V+na$。所以

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(V+na).$$

同理 $-y+V\ni na(n\in\boldsymbol{N})$，所以$y\in V-na$，即

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(V-na).$$

V是紧的，故存在$N\in\boldsymbol{N}$，使得$V\subset\bigcup_{n=1}^{N}(V-na)$。取$x\in G$，由于$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(V+na)$，则必有$k\in\boldsymbol{N}$使得$x\in V+ka$。又$V\subset\bigcup_{n=1}^{N}(V-na)$，所以

$$x\in V-na+ka=V+(k-n)a,\ n\in\{1,2,\cdots,N,\}.$$

以上说明，若$x\in V+ka$，则$x\in V+(k-n)a$。即可以缩小k。记$K_1=\min\{l\in\boldsymbol{N}\mid x\in V+la\}$，则$k_1\leqslant N$，于是$G\subset\bigcup_{n=1}^{N}(V+na)$，因此$G$是紧集。证毕。

例 G是紧群，则G是单一的充分必要条件是Γ是T_d的子群，其中$\boldsymbol{T}_d$表示取离散拓扑的单位圆周。

证 若G是单一的，$G=\overline{\boldsymbol{Z}a}$，$G$由$a$生成，则$\gamma\in\Gamma$必由$\gamma(a)$决定。若$\gamma(a)=\alpha$，$\gamma'(a)=\beta$，则$(\gamma\gamma')(a)=\alpha\cdot\beta$，故$\gamma\to\gamma(a)$是同构的。

又G是紧的，则Γ是离散的，所以Γ是$\boldsymbol{T}_d$的子群。

反之，若Γ是$\boldsymbol{T}_d$的子群，则$G=\widehat{\Gamma}\cong\widehat{\boldsymbol{T}}_d/\Gamma^{\perp}$。由§7.4讨论知给$\Gamma$以离散拓扑，记作$\Gamma_d$，则$\widehat{\Gamma}_d=\overline{G}$，$\overline{G}$是$G$的Bohr紧化，且映射$\beta: G\to\overline{G}$，即$\beta(x)\gamma=\gamma(x)$，有$\overline{\beta(G)}=\overline{G}$。由此知$\widehat{\boldsymbol{T}}_d=\overline{\boldsymbol{Z}}$，即$G=\overline{Z}/\Gamma^{\perp}$。

由映射β：$\boldsymbol{Z}\to\overline{\boldsymbol{Z}}$。知$\overline{Z}$由$\beta(1)$生成，即$\overline{\boldsymbol{Z}}$是单一的。又$\pi$：$\overline{\boldsymbol{Z}}\to\overline{\boldsymbol{Z}}/\Gamma^{\perp}$，故$\pi\beta(1)$生成商群$\overline{\boldsymbol{Z}}/\Gamma^{\perp}$，所以$G\cong\overline{\boldsymbol{Z}}/\Gamma^{\perp}$是单一的。

由以上讨论知T是单一的．事实上$\hat{T}=Z$，而Z是T_d的一个子群．

定义 8　G_1、G_2是拓扑群，U是$0\in G_1$的邻域，若存在着U到$0\in G_2$的邻域上的同胚映射φ，使得对一切$x,y\in U$，$x+y\in U$有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$，则称$G_1$局部同构于$G_2$．

局部同构是一个等价关系．即

(1) G局部同构于G（自反性）．

(2) 若G_1局部同构于G_2，则G_2局部同构于G_1（对称性）．

事实上．若U是$0\in G_1$的邻域，φ是U到$0\in G_2$邻域上的同胚映射．令w_1是$0\in G_1$的邻域，使得$w_1+w_1\subset U$．取$w_2=\varphi(w_1)$，将φ^{-1}限制在w_2上记作ψ，则w_2是$0\in G_2$的邻域，且ψ是w_2到w_1上的同胚映射，若$x,y\in w_2$且$x+y\in w_2$，则$\psi(x)$，$\psi(y)\in w_1\subset U$且$\psi(x)+\psi(y)\in w_1+w_1\subset U$．故$x+y\equiv\varphi(\psi(x))+\varphi(\psi(y))=\varphi(\psi(x)+\psi(y))$，所以$\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y)$，即$G_2$局部同构于$G_1$．

(3) 若G_1局部同构于G_2，G_2局部同构于G_3，则G_1局部同构于G_3（传递性）．

例如，若H是交换群G的离散子群，则H是闭的，且G局部同构于G/H．

事实上，H是离散的，显然$\overline{H}=H$．对于$0\in G$可以找到一个邻域U使$U\cap H=\{0\}$．于是π：$U\to\pi U$是1-1的且为开连续映射，所以G和G/H局部同构．

定理23　若拓扑群G局部同构于R^n，则G包含一个开子群G_0，G_0拓扑同构于$T^m\times R^{n-m}$、即

$$G_0\cong T^m\times R^{n-m},\quad(0\leqslant m\leqslant n).$$

证　G局部同构于R^n，R^n也局部同构于G，则在R^n中存在包含0的开球U，在G中存在0的开邻域V，及同胚映射φ：$U\to V$，使得当x,y；$x+y\in U$有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$．

$x\in R^n$，存在$p\in N$使得$x/p\in U$．若$x/q\in U$，则

$$p\varphi\left(\frac{x}{p}\right)=p\varphi\left(\frac{qx}{qp}\right)=pq\varphi\left(\frac{x}{pq}\right),$$

$$q\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=q\varphi\left(\frac{px}{pq}\right)=pq\varphi\left(\frac{x}{pq}\right).$$

所以可以如下定义映射$\Phi: \boldsymbol{R}^n \to G$,

$$\Phi(x)=p\varphi\left(\frac{x}{p}\right).$$

显然Φ是一个代数同态. 事实上, 若$x, y \in \boldsymbol{R}^n$, 取$p$充分大使$\frac{x}{p}$, $\frac{y}{p}$, $\frac{x+y}{p} \in U$, 则

$$\varphi\left(\frac{x+y}{p}\right)=\varphi\left(\frac{x}{p}\right)+\varphi\left(\frac{y}{p}\right),$$

所以 $$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y).$$

又φ是同胚映射, 故Φ是连续的开映射. $\Phi|_U=\varphi$. 即Φ: $\boldsymbol{R}^n \to \Phi(R^n)$是$\boldsymbol{R}^n$到$\Phi(\boldsymbol{R}^n)$上的代数同态且为连续的开映射. 由第六章定理 7 知

$$\Phi(\boldsymbol{R}^n) \cong \boldsymbol{R}^n/\ker\Phi.$$

Φ是开映射, 故$\Phi(\boldsymbol{R}^n)$是G的开子群, 取$G_0=\Phi(\boldsymbol{R}^n)$, 则

$$G_0 \cong \boldsymbol{R}^n/\ker\Phi$$

φ是同胚映射, $\varphi(0)=0$, 故$\ker\Phi \cap U=\{0\}$, 即$\ker\Phi$是离散的.

若H是$\boldsymbol{R}^n$的离散子群, 则$\boldsymbol{R}^n/H \cong \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. 这可由归纳法证明, 事实上, 当$n=1$, $H \cong \boldsymbol{Z}$, 则$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong \boldsymbol{T}$. 再证$n>1$结论成立(读者自证).

由以上事实知$\boldsymbol{R}^n/\ker\Phi \cong \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m}$, 即

$$G_0 \cong \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m}.$$

推论12 若G是连通的, 且G局部同构于$\boldsymbol{R}^n$, 则$G \cong \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$.

证 若G是连通的, 则G的任何一个开子群也是闭的, 故只有

$G_0=G$，所以$G\cong T^m\times R^{n-m}$.

定理24 G是局部紧交换群且为紧生成的，则G具有闭子群G_0拓扑同构于$Z^m(m\geqslant 0)$，且使得$G/G_0\cong G/Z^m$是紧的。

证 G是紧生成的，故有紧集$K\subset G$，使K所生成的子群$[K]$在G中是稠密的，即$\overline{[K]}=G$. 取$J=K\cup(-K)$，则$J=-J$且$\overline{[J]}=G$，即G可由对称紧集生成。若取U是$0\in G$的紧对称邻域，令$V=J\cup U$，则$\overline{[V]}=G$。这说明G可由单元0的对称紧邻域生成。取定V后，令$V_1=V$，$V_2=V+V=\bigcup_{x\in V}(x+V)$，$V_{n+1}=V_n+V$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$是$V$所生成的最小子群，因$V$是非空的，故$\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$是非空的. 又开子群一定是闭的，所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n=G.$$

V_2是紧的，故存在x_1，x_2，…，$x_p\in G$，使得

$$V_2\subset\bigcup_{n=1}^{p}(V+x_n).$$

记$H_i=[x_i]=Zx_i$，即H_i是由x_i生成的，记$H=[x_1,\cdots,x_p]=\{c_1x_1+\cdots+c_px_p|c_1,\cdots,c_p\in Z\}$，即$H$是有限生成的，显然

$$V+H\supset V_1,\ V+H\supset V_2.$$

又若$V_n\subset V+H$，则$V_{n+1}=V_n+V\subset V+H+V=V_2+H\subset V+H+H=V+H$，所以对一切$n$有$V_n\subset V+H$. 故

$$G=V+H.$$

下面分两种情形讨论.

情形一. 若$\overline{H_i}(i=1,2,\cdots,p)$都是紧的，则$\overline{H}$是紧的，故$G=V+\overline{H}$是紧的，此时取$m=0$. 定理得证.

情形二. 若G不是紧的，则存在$i(1\leqslant i\leqslant p)$，使$\overline{H_i}$不是紧的，又$\overline{H_i}$是单一的，由定理22知

$$\overline{H_i}\cong Z,$$

又H_i是离散的，故$H_i=\overline{H_i}\cong \boldsymbol{Z}$。

这就说明，$G=V+H$，V是紧的，H是G的子群且为有限生成的，若G不是紧的，则H必包含一个G的闭子群与$\boldsymbol{Z}$拓扑同构。又H是有限生成的，由归纳法知，存在一个最大的$m\geqslant 0$，使得H包含一个G的闭子群与$\boldsymbol{Z}^m$同构。

再考虑$G/\boldsymbol{Z}^m$。设π是$G\to G/\boldsymbol{Z}^m$的同态映射，π是连续的开映射，$G=V+H$。所以$\pi G=\pi V+\pi H$，且πV是紧的。这样一来πG又可写成紧集合πV与代数群πH之和，故可将以上对$G=V+H$的讨论再一次运用到πG上。

若πG不紧，则πH中一定包含一个πG的闭子群与$\boldsymbol{Z}$同构，但由以上m的选择知这是不可能的，故πG是紧的。又$\pi G=G/\boldsymbol{Z}^m$，所以$G/\boldsymbol{Z}^m$是紧的，定理得证。

定理25 每一个紧生成的、局部紧的可交换群G，拓扑同构于$\boldsymbol{Z}^p\times \boldsymbol{R}^n\times C$，即

$$G\cong \boldsymbol{Z}^p\times \boldsymbol{R}^n\times C,$$

其中$p\geqslant 0$，$n\geqslant 0$，C是紧的可交换群。

证 $\hat{G}=\Gamma$。由定理24知，G包含一个闭子群$\boldsymbol{Z}^m$。令$D=\boldsymbol{Z}^{m\perp}$，则由定理20知，群$\boldsymbol{Z}^m$的特征标群为$\hat{G}/\boldsymbol{Z}^{m\perp}$.即

$$\hat{\boldsymbol{Z}}^m\cong \Gamma/D,$$
$$\hat{D}\cong \hat{\Gamma}/D_{\perp}=G/\boldsymbol{Z}^m.$$

又$\hat{\boldsymbol{Z}}\cong \boldsymbol{T}$，故$\hat{\boldsymbol{Z}}^m\cong T^m$.又$T^m\cong \boldsymbol{R}^m/\boldsymbol{Z}^m$，$\boldsymbol{Z}^m$是$\boldsymbol{R}^m$的离散子群，由定义8后的例题知$\boldsymbol{R}^m/\boldsymbol{Z}^m$局部同构于$\boldsymbol{R}^m$.所以由

$$\Gamma/D\cong \hat{\boldsymbol{Z}}^m\cong \boldsymbol{T}^m\cong \boldsymbol{R}^m/\boldsymbol{Z}^m$$

知Γ/D局部同构于$\boldsymbol{R}^m$。

由定理24知$G/\boldsymbol{Z}^m$是紧的，$\hat{D}\cong G/\boldsymbol{Z}^m$，故$D$为离散的，即$D$为$\Gamma$的离散子群。所以$\Gamma/D$局部同构于$\Gamma$。由局部同构的传递性知，$\Gamma$局部同构于$\boldsymbol{R}^m$.由定理23知$\Gamma$包含一个开子群$\Gamma_o$，且

$$\Gamma_o\cong \boldsymbol{T}^p\times \boldsymbol{R}^{m-p},\ (o\leqslant p\leqslant m).$$

由此知，Γ_o是可除的，由引理12知，存在$\Gamma/\Gamma_o\to\Gamma$的同态映射σ，

使

$$\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{\Gamma/\Gamma_0}.$$

其中π是$\Gamma\to\Gamma/\Gamma_o$的同态映射，且

$$\Gamma\cong\Gamma_o\times\Gamma/\Gamma_o.$$

又$G=\widehat{\Gamma}$，故$G\cong\widehat{\Gamma}_o\times\widehat{\Gamma/\Gamma_o}$，又$\widehat{\Gamma}_o\cong\widehat{\boldsymbol{T}}^p\times\widehat{\boldsymbol{R}}^{m-p}\cong\boldsymbol{Z}^p\times\boldsymbol{R}^{m-p}$，

所以 $$G\cong\boldsymbol{Z}^p\times\boldsymbol{R}^{m-p}\times\widehat{\Gamma/\Gamma_o}.$$

又Γ_o是开的，故Γ/Γ_o是离散的，所以$\widehat{\Gamma/\Gamma_o}$是紧的．令$C=\widehat{\Gamma/\Gamma_o}$，得

$$G\cong\boldsymbol{Z}^p\times\boldsymbol{R}^{m-p}\times C.$$

再令$m-p=n\geqslant0$，得$G\cong\boldsymbol{Z}^p\times\boldsymbol{R}^n\times C$. 定理得证。

推论13 有限生成的可交换群，必为整数加法群和有限交换群的直和。

证 若G的拓扑是离散的，则紧生成即为有限生成，故由以上定理知

$$G\cong\boldsymbol{Z}^p\times C.$$

且C是紧的必为有限的．

定理26 （局部紧交换群的基本结构定理）每一个局部紧交换群G都有一个开子群G_o拓扑同构于$\boldsymbol{R}^m\times C$，其中$m\geqslant0$，C是一个紧的交换群．

证 G是局部紧的，令V是$0\in G$的紧对称邻域，$V_1=V$，$V_{n+1}=V_n+V$．且令$G_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$，则$G_1$是$G$的开子群，且$G_1$是由$V$生成的，故$G_1$为紧生成的，由定理25知

$$G_1\cong\boldsymbol{Z}^n\times\boldsymbol{R}^m\times C.$$

因此G_1包含一个开子群G_o，且

$$G_o\cong\boldsymbol{R}^m\times C.$$

G_o显然是G的开子群．定理得证．

E. Hewitt and K.A. *.armonic Analysis,*
Springer-Verlag,

T. S.Liu and A. Von Rooij, Harmonic Analysis, Vol I,
In manuscript.

W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New york,
1973.

W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill,
New york, 1966.

W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Wilay (Inter—
science), New york, 1962.

[ＧｅｎｅｒａｌＩｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名＝泛函分析与抽象调和分析引论
作者＝（美）刘登胜，齐植兰编著
页数＝３０２
ＳＳ号＝１００６９８２５
出版日期＝